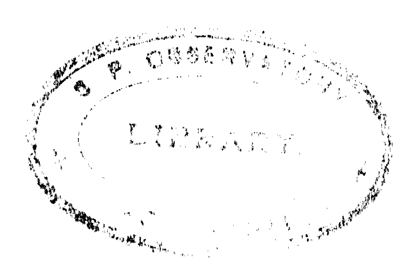
ACC. NO. 1317

Ac. No. 1317
Class. No.
Sh. No. 42a Q



CALL NO. 531
APP

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

OUVRAGES DE M. Paul APPELL.

Éléments d'Analyse mathématique *à l'usage des Candidats au certificat de mathématiques générales, des Ingénieurs et des Physiciens.* Cours professé à l'École centrale des Arts et Manufactures. 4e édition entièrement refondue .... **80 fr.**

Traité de Mécanique rationnelle (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 5 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

TOME I. — *Statique. Dynamique du point.* 5e édit. entièret refondue. **100 fr.**

TOME II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique* 4e édit. **100 fr.**

TOME III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* 2e édit. entièrement refondue, avec une Note de E. et F. COSSERAT, *Sur l'action euclidienne* .... **100 fr.**

TOME IV. — *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation.* 2e édit. revue et aug. avec le concours d'Alex. VÉRONNET, astronome à l'Observatoire de Strasbourg .... **60 fr.**

TOME V. — *Éléments de calcul tensoriel. Applications géométriques et mécaniques*, avec la collaboration de René THIRY, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg .... **60 fr.**

Cours de Mécanique de la classe de Mathématiques spéciales, conforme au programme du 27 juillet 1904, à l'usage des candidats aux Écoles Normale, Polytechnique, Centrale, Navale (4e édition entièrement refondue). **50 fr.**

Les mouvements de roulement en dynamique, avec deux Notes de J. HADAMARD. (*C. S.*) .... **10 fr.**

Sur une forme générale des équations de la dynamique. (FASC. I du *Mémorial des Sciences mathématiques.*) .... **15 fr.**

Séries hypergéométriques de plusieurs variables. Polynomes d'Hermite et autres fonctions de l'hyperespace. (FASC. III du *Mémorial des Sciences mathématiques.*) .... **15 fr.**

OUVRAGE DE MM. APPELL ET GOURSAT.

Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 2e édition revue et augmentée par Pierre FATOU, astronome à l'Observatoire de Paris :

TOME I. — *Études des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.*

TOME II. — *Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent. Fonctions automorphes.* Les 2 vol. **200 fr.**

OUVRAGE DE MM. APPELL ET CHAPPUIS.

Leçons de Mécanique élémentaire, *à l'usage des classes de Mathématiques A et B.* 4e édition entièrement refondue .... **20 fr.**

OUVRAGE DE MM. APPELL ET DAUTHEVILLE.

Précis de Mécanique rationnelle. *Introduction à l'Etude de la Physique et de la Mécanique appliquée* à l'usage des Candidats aux certificats de licence et des Élèves des Écoles techniques supérieures. 4e édition, revue et augmentée .... **100 fr.**

OUVRAGE DE MM. APPELL ET KAMPÉ DE FÉRIET.

Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite .... **100 fr.**

OUVRAGE DE MM. APPELL ET LACOUR.

Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques. 2e édition, revue et augmentée, avec le concours de R. GARNIER, Professeur à l'Université de Poitiers .... **80 fr.**

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT

RECTEUR HONORAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

TOME QUATRIÈME. — FASCICULE II.

LES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE EN ROTATION

FIGURE DE LA TERRE ET DES PLANÈTES

RÉDIGÉ PAR

Alex. VÉRONNET

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE STRASBOURG.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1937



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

PRÉFACE.

H. Poincaré, dans ses *Figures d'équilibre* (1902), avait traité le problème de la recherche des figures d'équilibre d'un liquide en rotation à la fois pour une masse homogène et pour une masse hétérogène. P. Appell, en lui succédant à la chaire de Mécanique céleste (1913), avait jugé que ce problème méritait d'être repris, mais aussi que les deux parties devaient être complètement distinguées l'une de l'autre. Son cours de 1914, publié en 1920, et qui forme le premier fascicule de ce tome IV de son *Traité de Mécanique rationnelle*, portait uniquement sur les figures d'équilibre d'une masse *homogène* en rotation.

Les circonstances l'ont empêché de continuer son cours sur les figures d'une masse *hétérogène* en rotation, et sur la figure de la Terre et des planètes, qui constitue l'objet de ce second fascicule. Il jugeait d'ailleurs excellemment que la question n'était pas suffisamment au point. Aussi, dans un Mémoire fondamental des *Acta Mathematica* (1923), qui fait le digne pendant du Mémoire sensationnel de H. Poincaré sur les *Figures dérivées des ellipsoïdes* (1900) dans le cas d'une masse homogène, il attire l'attention sur le problème général lui-même de la rotation d'une masse hétérogène, sur les conditions hydrostatiques restrictives de l'équilibre, sur l'impossibilité du mouvement à la Poinsot, etc. C'est là le *problème d'Appell*, qui fait l'objet de la *première Partie* du présent Ouvrage.

Sur ses conseils, toujours aussi judicieux qu'éclairés, j'ai étudié complètement la question et je me suis efforcé de délimiter et de définir toutes les sortes de mouvement et de figures d'équilibre

possibles, alors qu'on avait étudié jusque là presque uniquement la question de l'équilibre relatif. Finalement, on démontre que *le mouvement le plus général d'une masse hétérogène libre, et soumise à l'attraction mutuelle de ses parties, se ramène à la rotation autour d'un axe de révolution de direction fixe*, la vitesse de rotation de chaque particule pouvant varier, en profondeur comme en latitude, d'une façon quelconque. Les surfaces de niveau et les surfaces d'égale densité sont toujours de *révolution* et symétriques par rapport à un plan équatorial passant par le centre de gravité. La rotation se fait autour d'un *axe unique*, qui est l'axe de révolution de ces surfaces et le plus grand axe d'inertie de la masse.

On distingue alors *deux cas de mouvement* possible et deux seulement : le cas de l'*équilibre relatif*, où la masse tourne en bloc avec la même vitesse de rotation autour de son axe, et le cas du *mouvement permanent*, où les molécules tournent avec des vitesses différentes autour de cet axe. Les équations générales du mouvement et de l'équilibre hydrodynamique sont les mêmes dans les deux cas, avec les mêmes formules, sauf que la vitesse de rotation est une quantité constante dans le premier cas et variable dans le second.

J'ai démontré encore que le second cas se décompose lui-même en deux autres. Si les surfaces de niveau et les surfaces d'égale densité coïncident (en particulier sur la surface extérieure), les vitesses de rotation sont fonction uniquement de la distance à l'axe de rotation et les surfaces d'égale vitesse sont cylindriques autour de cet axe. La réciproque est vraie. Si les vitesses ne sont pas cylindriques, les surfaces de niveau et d'égale densité ne coïncident pas. En particulier, la surface extérieure ne peut pas être une surface d'égale densité.

Dans tous les cas, il y a impossibilité du mouvement à la Poinsot, comme le ferait un corps solide. L'axe de rotation conserve toujours une direction fixe. On verra, dans la quatrième Partie, ce qu'il en advient dans le cas de la précession, agissant sur une masse fluide (Chap. XV).

La *seconde Partie* de cet Ouvrage est consacrée à l'étude du cas des surfaces de niveau ellipsoïdales. M. Hamy, dans sa remarquable Thèse, avait démontré que, dans l'équilibre relatif, ces surfaces, et par conséquent la surface extérieure, ne peuvent pas être rigoureusement ellipsoïdales pour une masse hétérogène en rotation. Ce résultat, qui ressortait déjà des calculs de seconde approximation, a été étendu ensuite au cas du mouvement permanent, quelle que soit la variation des vitesses de rotation.

Ces démonstrations ont compliqué singulièrement l'étude des figures d'équilibre d'une masse hétérogène, dans le cas général d'une vitesse de rotation quelconque, et retardé la solution dans le cas pratique de la figure des planètes et de l'évolution de cette figure, avec la contraction et l'accélération de la vitesse de rotation.

On a vu, dans le premier fascicule de cet Ouvrage, comment l'étude des figures d'équilibre d'une masse homogène avait pu être faite d'une façon complète pour les figures ellipsoïdales, mais seulement amorcée pour les autres figures qui dérivent des ellipsoïdes, et cela grâce aux efforts conjugués des plus grands mathématiciens.

Dans le cas présent d'une masse hétérogène, les résultats positifs et pratiques ont pu être poussés même plus loin, sans effort mathématique trop compliqué, mais par une recherche patiente et progressive des conditions d'approximation successive et par la *recherche de limites* entre lesquelles la solution du problème devait se trouver certainement renfermée. Cette méthode, dont on verra différents exemples dans cet Ouvrage, rappelle plutôt les procédés du physicien qui, guidé par les résultats d'expériences antérieures, les renouvelle, les précise et trouve enfin l'expérience cruciale qui décide du résultat final.

On a pu en effet renfermer les figures d'une masse hétérogène, dans le cas le plus général, entre deux figures ellipsoïdales bien définies, puis rattacher ces ellipsoïdes eux-mêmes à ceux d'une masse homogène en rotation. Les résultats et les calculs relatifs à la masse homogène devenaient directement applicables pour n'importe quelle vitesse de rotation, et cela avec une approximation toujours suffisante, que l'on peut évaluer et perfectionner.

De plus, la figure d'équilibre trouvée n'est pas autre chose que la première figure dérivée des ellipsoïdes de révolution dans le cas d'une masse homogène. Après l'exclusion des ellipsoïdes à trois axes, puis des ellipsoïdes de révolution, comme figures d'équilibre, il ne restait plus que cette unique *figure dérivée des ellipsoïdes*, comme figure d'équilibre d'une masse hétérogène quelconque avec des vitesses quelconques.

Elle reste d'ailleurs toujours très voisine d'un ellipsoïde.

On a vu en effet, par les résultats de la première Partie de cet Ouvrage, que les surfaces ne pouvaient être que de révolution, ce qui excluait les ellipsoïdes à trois axes et toutes les figures dérivées de ceux-ci, ce qui simplifiait déjà beaucoup les recherches.

De plus, j'avais déjà démontré dans ma Thèse que la figure d'une masse hétérogène de révolution devait toujours être comprise entre celles de deux ellipsoïdes homogènes, l'un de densité égale à la densité moyenne et l'autre à la densité centrale de la masse hétérogène. Mais cette démonstration était basée sur l'étude de la figure d'équilibre de deux masses hétérogènes à surfaces internes ellipsoïdales et vitesses variables. Les démonstrations qui étendaient à ce cas l'impossibilité des surfaces rigoureusement ellipsoïdales rendaient caduques ces conclusions.

Or, on peut remarquer qu'une masse hétérogène quelconque est toujours comprise entre deux limites : la masse homogène et la masse complètement concentrée en un point. La figure d'une masse hétérogène et ses surfaces de niveau devaient donc être comprises entre la figure et les surfaces d'une masse homogène et celles d'une masse complètement concentrée, c'est-à-dire *entre la surface d'un ellipsoïde de révolution et la surface de Roche*.

J'ai démontré de plus que l'on peut faire coïncider la surface de Roche avec un ellipsoïde de révolution, à moins d'un dixième près, dans le cas le plus défavorable. On peut donc, en première approximation, avec une approximation très suffisante, considérer les surfaces de niveau d'une masse hétérogène comme ellipsoïdales. Les calculs indiqués plus haut redevenaient applicables et le problème était résolu.

On démontre alors qu'une masse hétérogène en rotation prend d'abord une figure voisine de la sphère, sous la forme d'un ellipsoïde de révolution légèrement déprimé entre les pôles et l'équateur. Si la masse se concentre, la vitesse augmente, et cette figure s'aplatit de plus en plus jusqu'à prendre la forme d'un *disque plat*, comme dans le cas des ellipsoïdes de révolution, dits de Maclaurin, d'une masse homogène.

Les *deux limites de l'aplatissement*, déterminées par Clairaut, et indépendantes de toute loi des densités intérieures, se retrouvent ici et peuvent se généraliser d'une façon remarquable sous une forme aussi simple, applicable depuis les figures voisines de la sphère jusqu'à celles voisines du disque aplati.

J'ai de plus réussi à écrire, en première approximation, les équations de l'équilibre des figures voisines du disque plan. Ce sont les équations qui correspondent, pour le disque et les grandes vitesses de rotation, aux équations de Clairaut pour les ellipsoïdes voisins de la sphère, dans le cas d'une faible vitesse de rotation. On vérifie, comme dans le problème de Clairaut, que les figures sont également ellipsoïdales. Aux deux bouts de la chaîne de l'évolution d'une masse hétérogène, la sphère et le disque, nous retrouvons donc les surfaces de niveau ellipsoïdales, dont les figures et surfaces réelles ne s'écartent pas de plus d'un dixième.

Nous voyons encore par là que la scission de la masse par *dédoublement* est également impossible, comme pour une masse homogène. Il peut y avoir seulement libération progressive des particules à l'équateur pour former un *anneau*, analogue à celui de Saturne mais non séparé, qui se confondra avec le disque final.

Ajoutons encore que le *problème de la stabilité des figures* peut être également regardé comme résolu puisqu'il se ramène à celui des ellipsoïdes homogènes de révolution, traité dans le premier fascicule.

La *troisième Partie* comprend l'étude pratique de la *figure de la Terre*, dans le cas d'une masse tournant tout d'une pièce avec une faible vitesse. C'est le *problème de Clairaut*, qu'il a résolu par son équation différentielle célèbre, et par la démonstra-

tion que toutes les surfaces de niveau sont ellipsoïdales, en première approximation.

On y étudie ensuite l'autre formule fondamentale de Clairaut, qui détermine l'aplatissement de chaque couche d'après l'attraction en chaque point et les *deux limites* qu'il en déduit et qui sont indépendantes de toute loi des densités.

La formule de d'Alembert, basée sur les moments d'inertie et le mouvement de précession, permet de déterminer des limites encore plus étroites de cet aplatissement.

H. Poincaré, en utilisant la transformation de Radau, qui ramène au premier ordre l'équation différentielle de Clairaut, avait montré que l'on obtient ainsi une limite plus resserrée de l'aplatissement de la Terre, limite indépendante également de toute loi de densités à l'intérieur de la Terre. J'avais déterminé, dans ma Thèse, une *seconde limite* très voisine de celle de Poincaré, indépendante comme celle-ci de toute loi de densités et qui permet de fixer à moins d'une unité près la valeur de l'inverse de l'aplatissement de la Terre, par la combinaison des mesures astronomiques de la précession, des mesures physiques de la pesanteur, des mesures géodésiques du rayon équatorial de la Terre, toutes mesures connues avec cinq chiffres exacts au moins. Les calculs pratiques et numériques, faits avec de très nombreuses lois de densités, vérifient les calculs théoriques, et réduisent à quelques centièmes d'unité l'écart entre les deux valeurs limites de l'inverse de l'aplatissement, précision qui dépasse de beaucoup celle des meilleurs travaux de géodésie.

Cette étude de la figure précise de la Terre se termine par l'application, au problème de Clairaut comme à celui de Poincaré, des calculs en *seconde approximation*, en tenant compte du carré de l'aplatissement. On détermine les faibles corrections qui s'en déduisent, sur la surface extérieure de l'ellipsoïde et sur les vraies limites de l'aplatissement, en toute approximation, n° 154.

La *quatrième Partie* contient l'étude des différentes questions qui se rattachent à celle de la figure de la Terre.

C'est d'abord l'étude, en première et en deuxième approximation,

de la variation de la *pesanteur* donnée par une troisième formule de Clairaut et qui permet de déterminer également l'aplatissement de la Terre, puis les résultats des observations à ce sujet, la question de l'isostasie, l'action des gaz internes pour expliquer les soulèvements et l'égalisation de la pesanteur, etc.

C'est ensuite l'application numérique à ce problème des différentes *lois de densités*, étudiées par les astronomes, lois de Roche, de Lipschitz, de Lévy, les limites de la densité centrale, la formule, qui représente le plus exactement la variation de la densité et de la pesanteur à l'intérieur de la Terre, etc.

On y a joint l'étude des différentes hypothèses que l'on peut faire, en dehors de celle de Clairaut, et qui peuvent influer sur l'aplatissement calculé, comme l'hypothèse d'une Terre solide, envisagée par H. Poincaré, ou celle de vitesses internes variables. A propos de cette dernière hypothèse, j'ai repris les calculs de la précession, en les étendant aux différents parallèles de la masse fluide, montré alors qu'il s'introduit une force tangentielle périodique, qui permet d'expliquer les *tremblements de terre*, les charriages, etc., j'ai montré enfin que l'aplatissement de l'écorce, différent de celui des couches internes, peut, par l'effet de la précession, produire un *déplacement du pôle*, qui a pu laisser des traces glaciaires durant les périodes géologiques.

Enfin, les mêmes calculs sont appliqués à *Jupiter* et à *Saturne*. Les limites de Clairaut montrent alors, pour ces deux planètes, qu'il doit y avoir une condensation intérieure prononcée, un véritable *noyau central*, incompatible avec les lois de densités de Roche et de Lipschitz, et que la loi plus générale de Lévy permet seule d'interpréter et de traduire. Bien plus, les limites imposées alors par les formules de Clairaut et de d'Alembert ne permettent d'expliquer l'aplatissement de ces deux planètes par aucune des lois de densités connues, et l'on montre qu'il faut nécessairement admettre sur ces planètes des *vitesses de rotation plus grandes à la surface* qu'à l'intérieur. On déduit de là les conditions mécaniques et physiques de la formation des bandes parallèles à l'équateur observées sur ces planètes, la formation aussi des taches du Soleil et de l'anneau de Saturne.

Je tiens à signaler en terminant les deux Ouvrages les plus importants publiés dernièrement en français sur la question générale étudiée ici, par MM. Wavre et Dive. On trouvera le résumé de ces travaux, avec les remarques et les réserves qu'ils suggèrent, aux n°s 45, 78, 91, 115, 153, 164, 165, 191, 192, 196.

Au problème des figures d'équilibre d'une masse homogène, se rattachait celui de la possibilité, de la stabilité et de la formation des anneaux, hypothèse de Laplace et expérience de Plateau. C'est pourquoi, dans la seconde édition du premier fascicule de cet Ouvrage, j'avais ajouté un dernier chapitre sur les figures annulaires et leur formation.

L'étude des figures d'équilibre d'une masse hétérogène et de la forme des planètes conduit à envisager également la scission de la masse en deux autres et la formation possible des étoiles doubles et des satellites des planètes par ce phénomène de dédoublement. Aussi J. H. Jeans avait intitulé *Problems of Cosmogony* une étude générale sur les figures d'équilibre possibles d'une masse hétérogène en rotation plus ou moins rapide. De son côté, H. Poincaré avait étudié et publié, après ses *Figures d'équilibre*, ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, où il a précisé le problème de l'évolution et de la formation des astres pour en faire un problème vraiment et uniquement scientifique, un problème de Mécanique et de Physique. C'est actuellement le problème fondamental de l'Astronomie physique et de la Mécanique céleste, comme le problème de la formation des couches de l'écorce terrestre est le problème fondamental de la Géologie. La connaissance de la constitution de l'Univers est assez avancée pour que le problème de son évolution et de sa formation puisse être abordé et résolu.

De nombreuses études ont été publiées sur ce sujet, qui avait retenu également l'attention de P. Appell. Il avait songé d'en faire l'objet d'un troisième fascicule de ce tome quatrième, qui serait devenu un véritable cours de Mécanique céleste. Le temps seul lui a manqué. Depuis, à la suite de Poincaré et d'Appell, de nombreux chercheurs ont publié des travaux remarquables sur ces problèmes fondamentaux, au point de vue physique, sur la constitution,

c'est-à-dire l'*équilibre thermodynamique* des étoiles et par conséquent leur évolution et, au point de vue mécanique, sur la formation même des étoiles et des planètes par la condensation de la matière dans un milieu diffus et l'action des perturbations des astres voisins. Cette concentration de la matière se continue dans la formation et l'évolution des amas d'étoiles et des voies lactées, et l'on peut se rendre compte actuellement que la seule force de la gravitation, qui explique tous les mouvements des astres, depuis les travaux de Newton et de Laplace, qui explique leurs figures d'équilibre, depuis ceux de Clairaut et de Poincaré, permet d'expliquer également leur formation et l'origine même de tous leurs mouvements.

On trouvera déjà dans *Constitution et évolution de l'Univers*, publié chez Doin, l'ébauche des questions qui pourraient être traitées dans ce troisième fascicule. Elles pourraient être reprises et complétées, avec tous les résultats plus récents, pour faire un ensemble très complet de ce que la Mécanique et la Physique peuvent nous apporter sur la formation et l'évolution de notre Univers. On peut du moins actuellement resserrer la solution du problème de la constitution et de la formation des astres entre des *hypothèses limites* très voisines, qui nous donnent une première approximation certainement très approchée de la solution générale.

D'ailleurs, de même que le problème de la formation des couches géologiques se pose seulement après le problème astronomique de la formation de la Terre, de même le problème de la formation des astres se pose seulement après celui de la matière pesante et de ses atomes, formés par la concentration et la neutralisation électrique des protons et des électrons primitifs, issus probablement de l'éther, avec les rayons cosmiques, d'après la théorie de Millikan. De plus, les deux problèmes se ressemblent étrangement au point de vue Mécanique, et peut-être le second, qui marche à pas de géant, sera-t-il résolu par les mêmes moyens, grâce au concours de la Physique mathématique et de la Physique expérimentale.

Avril 1935. ALEX. VÉRONNET.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

LES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE
EN ROTATION.
FIGURE DE LA TERRE ET DES PLANÈTES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE HISTORIQUE DES TRAVAUX ET DES RÉSULTATS.

---

1. Chez les anciens. — Les premiers hommes qui voyagèrent du Nord au Sud, de Grèce en Égypte, ont dû remarquer la différence de hauteur du Soleil et des étoiles en ces différents lieux. Pythagore, vers l'an 500 avant notre ère, et probablement d'après ces observations, est le premier à enseigner que la Terre est ronde. Aristote adopte cette théorie dans son système philosophique et cosmogonique, vers — 300.

Peu après, vers l'an — 200, Ératosthène mesure un arc de méridien entre Alexandrie et Syène dans la haute Égypte, et en déduit que le rayon de la Terre était voisin de 7000^{km}. Ce résultat, exact à $1/10^e$ près, était remarquable pour l'époque.

Mais la conquête romaine ne tarde pas à étouffer la science grecque, comme le soldat romain avait tué Archimède. Le militarisme romain ne connaît pas de savants, et les conquêtes scientifiques et astronomiques des penseurs grecs et égyptiens ne furent connues que beaucoup plus tard en Occident et en Gaule, par l'intermédiaire des Arabes, par l'Afrique et l'Espagne.

2. Au moyen âge. — La science moderne, qui est surtout expérimentale au contraire de la science grecque, qui est surtout dialectique et géométrique, est née et apparaît dès le XII[e] siècle, en France, à Paris, et cela d'une façon complètement indépendante, comme nous l'ont révélé les recherches bibliographiques de Duhem : théorie du levier, de l'arc-en-ciel, de l'aimant, lois de la chute des corps, etc.

La rotondité de la Terre ne fait plus de doute. En 1340, Nicole Oresme, publie *en français* son *Traité de la sphère*, où il démontre la rotation de la Terre, et la relativité du mouvement du ciel, par les mêmes preuves qu'aujourd'hui.

En 1492 Christophe Colomb découvre l'Amérique, en voulant faire le tour du monde, ce que fera Magellan 30 ans plus tard (1520). En 1530 le médecin français Fernel mesure la distance de Paris à Amiens et en déduit le *rayon de la Terre* à 1/1000[e] près. La précision des mesures des anciens était, du premier coup, bien dépassée.

3. Newton et Cassini. Les premiers désaccords scientifiques. — C'est la connaissance de la mesure de Fernel, qui a permis à Newton la première vérification de sa loi de la gravitation, en montrant que c'était bien la pesanteur terrestre qui maintenait la Lune dans son orbite. Il étend, dans ses *Principes*, cette loi universelle à tous les mouvements et perturbations des astres, il déduit même la forme de la Terre et des planètes de l'attraction mutuelle de leurs particules, combinée avec la force centrifuge. La Terre, en la supposant homogène, devait être aplatie aux pôles et renflée à l'équateur.

Vers la même époque la géodésie est née par l'invention de la triangulation (Snellius 1617) et des lunettes à réticules (Picard 1669). Au début du XVIII[e] siècle, Cassini directeur de l'Observatoire de Paris, profite des premières mesures pour essayer d'en déduire la forme de la Terre. Il trouve qu'elle est *plus haute*, au pôle qu'à l'équateur, de 95 milles.

C'était, sur cette question, la première contradiction, et non la dernière, entre le calcul et les mesures.

4. La mission géodésique du Pérou et les calculs de Clairaut.

— Le conflit était grave, car si l'on admettait ces conclusions la Terre ne pouvait plus tourner autour de ses pôles. C'est pourquoi l'Académie des Sciences décida d'envoyer deux missions géodésiques, au Pérou et en Laponie, pour mesurer deux arcs de méridien assez éloignés l'un de l'autre pour que leur comparaison permit de trancher définitivement la question.

D'autre part, on pouvait se demander, si le calcul fait en supposant la Terre homogène, restait valable pour une disposition quelconque des densités à l'intérieur. C'est alors que Clairaut étudia et résolut complètement le problème dans sa *Théorie de la figure de la Terre* (1742), qu'il publia après les mesures de la mission de Laponie et avant le retour de celle du Pérou.

Il commence par établir, d'après Bouguer, les conditions hydrostatiques de l'équilibre du fluide, ce que Newton avait oublié de faire. Il établit une équation différentielle du second ordre qui relie l'aplatissement de toutes les couches à la densité. Cette équation, restée célèbre en mathématique, porte encore le nom d'*équation de Clairaut*. Il démontre qu'en première approximation les surfaces de niveau sont ellipsoïdales, et que leur aplatissement est croissant du centre à la surface.

Il établit ensuite *deux limites remarquables* entre lesquels l'aplatissement doit nécessairement être compris, l'une qui correspond au cas d'une masse homogène et l'autre au cas d'une masse condensée complètement au centre. Les mesures de la mission de Laponie, comparées à celles de Paris, prouvaient bien cette fois que la Terre était aplatie aux pôles, mais pas assez pour rentrer dans ses limites. Au contraire l'aplatissement de Jupiter, observé par Cassini 1/13, cadrait parfaitement avec ces deux limites.

Clairaut démontrait enfin une seconde *formule fondamentale*, qui donnait la variation de la pesanteur de l'équateur aux pôles et cela *indépendamment de toute hypothèse sur la variation des densités*. La valeur de g à la surface devait dépendre uniquement de l'aplatissement superficiel, du rapport de l'attraction à la force centrifuge, et du carré du sinus de la latitude. On pouvait donc en déduire l'aplatissement et Clairaut montrait que, dans ce cas, les mesures du pendule donnaient des valeurs conformes à ces deux limites.

Nous verrons comment au XXe siècle on a pu déterminer des

limites beaucoup plus resserrées, également indépendantes de la densité, ce qui a une importance fondamentale au point de vue théorique et pratique.

Après Clairaut, d'Alembert établit une *nouvelle formule* importante, qui permettait de déduire l'aplatissement de la Terre de la considération des moments d'inertie et des mesures purement astronomiques de la précession. Laplace démontre plus rigoureusement par les fonctions sphériques que les surfaces de niveau *doivent* être ellipsoïdales, et Legendre indique la correction à faire pour calculer la seconde approximation.

5. **Premiers résultats précis de la géodésie et du pendule. Bessel, Clarke, Faye.** — On a vu que si les mesures de Laponie et du Pérou avaient pu vérifier l'aplatissement de la Terre, elles n'étaient pas assez précises pour vérifier les limites imposées par Clairaut, ce qui montre à quel point ces calculs théoriques étaient en avance sur les observations par leur précision même. Nous constaterons le même phénomène plus tard, pour d'autres limites.

Il fallut attendre exactement un siècle pour arriver avec Bessel (1841) à une détermination un peu sérieuse de l'aplatissement de la Terre et qui cadrait avec les limites de Clairaut. Il trouvait, pour l'inverse de cet aplatissement, un nombre voisin de 300. Il faut remarquer, à ce sujet, que la précision des mesures ne pouvait lui donner que deux chiffres exacts, ce qui ne l'empêche pas d'en écrire 7, soit 299,1528. Ce qui nous fait sourire, car le troisième est certainement faux. Il est vrai qu'il y a quelques années les meilleurs calculateurs donnaient l'excentricité de la nouvelle planète Pluton avec six chiffres exacts, alors que le premier était très douteux.

Les dimensions de la Terre étaient données de même avec 9 chiffres exacts, soit pour le rayon équatorial 6377397,15 à un centimètre près. Les quatres premiers seuls sont à peu près exacts.

Les mesures géodésiques s'étaient multipliées dans le monde au XIX[e] siècle. Vers la même époque (1880) Faye en France et Clarke en Angleterre utilisent ces matériaux pour déterminer la forme et les dimensions de la Terre et retrouvent à peu près les mêmes valeurs pour l'aplatissement, mais différentes de celle de Bessel, 292 et 293.

Faye établissait de plus, par la discussion sur la précision des mesures, que l'erreur probable ne pouvait pas dépasser une unité pour l'inverse de l'aplatissement, ni être supérieure par conséquent à 294. Il montrait en même temps, que les mesures de la pesanteur, basées sur la formule de Clairaut, pouvaient modifier de 6 unités le dernier chiffre de l'inverse de l'aplatissement, si l'on tenait compte de la deuxième approximation.

6. **La limite de Poincaré. Nouveaux désaccords.** — Ces nouveaux nombres furent adoptés unanimement par les astronomes et les géodésiens. Mais, peu d'années après, Radau par une heureuse transformation, ramène l'équation de Clairaut à une équation différentielle du premier ordre, l'introduit dans la formule de d'Alembert et en déduit un aplatissement, dont l'inverse est voisin de 297. La précision et la valeur des mesures précédentes étaient remises en question.

En 1889, Henri Poincaré reprenait la question et montrait que cette valeur 297 était une *limite inférieure*, complètement indépendante de la répartition des densités à l'intérieur de la Terre, comme les deux limites de Clairaut. De plus, ce nombre se déduisait mathématiquement des seules mesures du coefficient de précession et du rapport de la force centrifuge à l'attraction, qui étaient connus avec au moins quatre chiffres exacts. La limite de l'inverse de l'aplatissement était déterminée, à une unité près, par des nombres donnés uniquement par les mesures du pendule et les mesures astronomiques. Les résultats des géodésiens étaient condamnés par ceux des astronomes et des mathématiciens.

7. **Nouveaux travaux géodésiques. Helmert, Hayford. L'isostasie.** — Devant ces résultats, les géodésiens se voient obligés de reprendre, sur de nouvelles bases, la critique scientifique de leurs mesures.

On avait d'abord corrigé la mesure de la pesanteur en chaque point, d'après la densité du sous-sol, correction de Bouguer, mais Faye et Pratt avaient fait remarquer dans la suite, que l'on obtenait des résultats plus concordants en négligeant cette correction et ils expliquaient ce fait par l'hypothèse de la *compensation*, d'après laquelle l'écorce terrestre serait plus dense sous les océans que

sous les continents, de sorte que les poids des couches superficielles y seraient les mêmes et que les attractions s'y compenseraient.

Helmert, directeur du service géodésique de Berlin, par une hypothèse analogue, fait la *condensation* de toute la masse superficielle, sur une couche située à environ 100^{km} au-dessous de la surface (1900). Les mesures géodésiques sont rendues encore plus concordantes et il trouve bien 297 pour l'inverse de l'aplatissement.

Un peu plus tard (1909) Hayford, en Angleterre, applique l'hypothèse de l'*isostasie* due à Airy, pratiquement la même que les précédentes, d'après laquelle les morceaux de la mosaïque, que forme l'écorce terrestre, doivent exercer la même pression sur la couche fluide sous-jacente, en équilibre hydrostatique. Les calculs faits d'après cette hypothèse lui donnent également le nombre exigé par la limite de Poincaré.

Callandreau (1889) reprend le problème de Clairaut en *seconde approximation* et Darwin l'applique à la limite de Poincaré, qui n'en est guère modifiée. Puis Darwin et Helmert (1900) calculent également la correction à apporter à la formule de Clairaut en seconde approximation. Helmert l'applique aux observations du pendule et en déduit le nombre 298, peu différent des précédents.

8. Travaux récents. La seconde limite de l'aplatissement. — M. Hamy, dans sa thèse (1888) avait démontré qu'une masse hétérogène, en rotation uniforme, ne pouvait pas prendre une forme rigoureusement ellipsoïdale et il avait étudié les lois de vitesses qui pouvaient donner des ellipsoïdes homofocaux. Il avait calculé pratiquement et numériquement la valeur de l'aplatissement, pour plusieurs lois de densités, dans l'hypothèse d'une Terre composée de trois couches et retrouvé la limite de Poincaré 297.

J'ai repris le même problème dans ma thèse (1912) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*) en considérant une variation continue des couches d'égale densité, et en étudiant d'une façon complète la variation de l'aplatissement avec la variation de la vitesse de rotation, comme cela avait été fait pour une masse homogène. Mais surtout je m'étais proposé d'étudier toutes les différentes hypothèses, capables de faire varier l'aplatissement donné, soit par la précession, soit par le pendule.

J'ai d'abord établi *une seconde limite* de l'aplatissement, qui donne une valeur très voisine de celle de Poincaré, et également indépendante de toute loi des densités, à l'intérieur de la Terre. L'écart théorique possible entre les deux valeurs de l'inverse de l'aplatissement ne dépasse pas 0,3 (297,10 et 297,40). Les 25 calculs numériques, faits avec toutes les lois de densités connues, donnent même 25 nombres identiques à 0,05 près. L'aplatissement est déterminé pratiquement avec 4 chiffres exacts. J'ai déterminé enfin les deux limites en seconde approximation, jusqu'au cinquième chiffre, montré que la troisième approximation, et les autres, n'influeraient que sur le sixième chiffre. On a bien la valeur réelle avec quatre chiffres exacts.

Cette valeur dépendait des hypothèses faites : Terre en équilibre hydrostatique, rotation en bloc. J'ai étudié aussi le cas d'une Terre solide, ou animée de vitesses variables à l'intérieur, et déterminé les modifications introduites dans l'aplatissement ou le coefficient de précession. Si la géodésie arrivait à déterminer l'inverse de l'aplatissement à une unité près, et en dehors des deux limites fixées, il faudrait admettre des rotations différentes, sur les différentes couches intérieures.

9. **P. Appell, reprise du problème général.** — Paul Appell, en 1914, par son cours sur la rotation d'une masse homogène, publié en 1920, attire de nouveau l'attention sur la question et suscite de nouveaux travaux. Il reprend et s'efforce de faire préciser les conditions hydrodynamiques de l'équilibre, la discrimination des mouvements possibles en dehors de l'équilibre relatif : mouvement à la Poinsot, mouvements avec vitesses différentes comme sur le Soleil et Jupiter, etc.

En particulier dans le cas de vitesses de rotation variables, j'ai déterminé la condition pour que le champ des accélérations ne soit pas tourbillonnaire et que les couches d'égale densité restent des surfaces de niveau.

On arrive à démontrer, en résumé, que les deux seuls mouvements possibles sont le mouvement relatif, avec rotation uniforme autour d'un axe fixe et le mouvement permanent, avec vitesses différentes sur chaque parallèle, autour d'un axe également fixe.

Dans les deux cas, les surfaces de niveau sont de révolution

autour de l'axe. Dans le second cas, les vitesses de rotation doivent être les mêmes à la même distance de cet axe, quand il y a une fonction des accélérations ou quand les surfaces de niveaux coïncident avec les surfaces d'égale densité.

Ces travaux et résultats forment l'objet de la *première partie* de cet ouvrage.

10. **Le problème de l'évolution et la cosmogonie**. — Comme on l'a vu dans le premier fascicule de cet ouvrage, on avait pu déterminer complètement l'évolution d'une masse homogène en rotation, quand la forme extérieure reste ellipsoïdale, et amorcer l'étude des figures de bifurcation.

Si l'on accélère la rotation d'une masse homogène, dont la *densité reste constante*, l'aplatissement croît avec la vitesse, puis à un certain moment la vitesse de rotation décroît alors que la masse continue à s'aplatir indéfiniment sous la forme d'un disque. A un certain moment la masse pouvait prendre la forme d'un ellipsoïde allongé à trois axes, qui alors s'allongeait indéfiniment, sous forme d'aiguille.

Dans ce premier cas, il faut fournir une énergie, ou un moment de rotation toujours plus grand, à la masse, pour que, la densité restant constante, le rayon s'étende indéfiniment. Une masse isolée, comme le Soleil et les planètes, qui évolue en se contractant, conserve toujours un *moment de rotation constant*. Laplace, qui avait fait ces remarques, et introduit ce nouveau paramètre, avait montré que, dans ce cas, l'aplatissement augmente indéfiniment avec la contraction, et la vitesse de rotation aussi.

J'ai introduit, dans cette discussion, la considération du grand axe de l'ellipsoïde, *comme variable*, ce qui permet de déterminer la *grandeur* de la figure, aussi bien que sa forme à chaque moment de l'évolution, comme à la limite du disque aplati (P. Appell, *Mécanique rationnelle*, t. 4, n° 23 *bis*).

Le même problème se pose pour la masse hétérogène. Il se trouve simplifié du fait que cette masse doit rester de révolution. Il se trouve compliqué, du fait que M. Hamy a démontré, que les figures d'équilibre ne pouvaient pas être rigoureusement ellipsoïdales, dans le cas de l'équilibre relatif, rotation tout d'une pièce. Dans le cas de vitesses variables, Hamy avait étendu la première

discussion ci-dessus, densité constante, à une masse hétérogène, dont les surfaces de niveau seraient homofocales, et retrouvé les mêmes résultats. Je l'avais reprise et étendue aux surfaces de niveau homothétiques, et montré que la figure d'une masse hétérogène en rotation restait toujours comprise entre celles de deux masses homogènes de densité déterminée. L'évolution d'une masse hétérogène était rattachée à celle d'une masse homogène par *deux limites* étroites.

J'avais démontré en outre, que, dans le cas des ellipsoïdes homogènes ou hétérogènes, la force centrifuge ne pouvait jamais égaler l'attraction, avec la même vitesse de rotation dans toute la masse. Le *dédoublement* était donc impossible, par simple contraction et accroissement de vitesse. On ne pouvait pas expliquer ainsi par fractionnement la formation des satellites ou des étoiles doubles.

Depuis, on a étendu au cas général la démonstration d'Hamy, sur l'impossibilité des figures rigoureusement ellipsoïdales. Le problème devenait plus compliqué.

11. **Les deux limites de Clairaut étendues au cas général. Solution générale.** — Clairaut avait montré que, pour de faibles vitesses, l'aplatissement restait compris entre celui de la même masse supposée homogène, et celui de la masse condensée complètement au centre. On peut remarquer qu'il en sera de même pour toutes les vitesses et que l'on aura ainsi deux *figures limites :* l'ellipsoïde de révolution, cas de la masse homogène, et les *figures de Roche*, cas de la masse concentrée complètement.

J'ai démontré de plus que les figures de Roche diffèrent très peu d'un ellipsoïde, à quelques centièmes près. Pratiquement la surface extérieure d'une masse hétérogène quelconque se confondra avec celle d'un ellipsoïde à moins d'un centième près. On pourra toujours regarder les surfaces de niveau, comme ellipsoïdales, faire les calculs dans cette hypothèse simple, et conserver également les anciens calculs.

Comme Clairaut avait traité le problème des faibles vitesses, en négligeant le carré de l'aplatissement, on peut de même traiter celui des grandes vitesses et des grands aplatissements, en développant les formules en fonction du rapport des axes, qui est alors

très petit et négligeant leur carré. On retrouve alors, comme pour le problème de Clairaut, des surfaces rigoureusement ellipsoïdales.

La figure d'une masse hétérogène est donc rigoureusement ellipsoïdale à ses deux limites, au voisinage de la sphère et du disque aplati, et s'en écarte très peu entre les deux. En tout cas elle n'offre jamais de points d'inflexion et *ne se creuse pas*, donc ne se dédouble pas. La déformation des *figures de bifurcation* des ellipsoïdes homogènes, se traduit ici par un léger aplatissement entre le pôle et l'équateur. On pourra donc lui appliquer les mêmes calculs et les mêmes discussions que pour une masse homogène, résumés dans le numéro précédent et l'on obtiendra les mêmes résultats. La masse en se contractant tendra vers la figure d'un disque aplati, dont on peut déterminer le rayon et la vitesse limite des différents points.

Ces différents travaux formeront l'objet de la *deuxième partie de cet ouvrage*.

12. **Application à la Terre et aux planètes.** — Ce sera l'objet de la *troisième partie*. On y trouvera les travaux indiqués dans les numéros précédents, depuis Clairaut, Poincaré, etc., le problème en seconde approximation et ses résultats, pour la détermination de l'aplatissement. La quatrième partie donne les calculs relatifs à la pesanteur en première et seconde approximation, ainsi que ceux relatifs aux différentes lois sur la densité intérieure.

L'application à Jupiter et à Saturne, montre que la loi des densités de Roche est impuissante à expliquer leur aplatissement. Il faut pour l'expliquer admettre un véritable *noyau central* plus dense que les parties extérieures, introduire une loi des densités qui possède un point d'inflexion. On retrouvera une pareille loi en les supposant gazeux.

On verra que les particules de l'anneau de Saturne n'ont pu se détacher que s'ils avaient une vitesse considérablement plus grande que le reste de la masse, comme un satellite ou une grosse comète, qui seraient tombés dans son atmosphère.

L'extension des calculs de précession au cas général nous montrera que l'action perturbatrice de la Lune et du Soleil introduit une force tangentielle de surface, qui comprime ou distend alternativement les parallèles de 36°. On peut y voir une cause des

tremblements de Terre, des charriages géologiques, du creusement du fossé méditerranéen, etc.

Cette étude montre également que la précession agit plus fortement sur l'écorce plus aplatie que sur le noyau. Il doit donc y avoir de ce fait un *déplacement du pôle* à la surface, qui a pu être considérable au cours des périodes géologiques et peut expliquer les traces de glaciers, aux périodes anciennes, jusque sous l'équateur.

En remontant dans l'évolution d'une masse hétérogène, de plus en plus dilatée, se pose le problème de savoir comment ces masses, qui arrivent, en se dilatant, à se confondre dans une nébuleuse universelle, ont pu se séparer les unes des autres, se condenser, acquérir leur moment de rotation. C'est également un problème de mécanique céleste, que les lois de la mécanique permettent également de résoudre. C'est ce problème, posé par Laplace, que Poincaré a précisé et déblayé, en le rendant vraiment scientifique dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, qui forme l'objet de *Constitution et évolution de l'Univers* (Alex. Véronnet, chez Doin, 1926). Ce sera le sujet d'un troisième fascicule.

PREMIÈRE PARTIE.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE II.

ÉQUATION FONDAMENTALE D'HYDRODYNAMIQUE. DISCUSSION GÉNÉRALE.

13. **Les conditions du problème.** — Nous considérons une masse fluide quelconque, soumise à des forces quelconques et à des mouvements quelconques. Nous supposons le *fluide parfait*, c'est-à-dire sans viscosité ni frottement interne entre ses parties.

Dans le problème pratique que nous étudierons, la masse sera soumise seulement à l'attraction mutuelle de ses parties suivant la loi de Newton. Mais, dans cette première partie, nous supposerons aussi les forces extérieures quelconques pour conserver toute sa généralité au problème.

Les particules seront encore soumises aux forces intérieures du fluide, qui se réduisent à la poussée, due à la variation de pression, comme il a été établi dans le tome 3 de ce *Traité de Mécanique rationnelle*.

Nous supposons enfin les mouvements quelconques. Il s'introduira une force centrifuge et une force centrifuge composée en chaque point. Nous rechercherons ceux de ces mouvements, pour lesquels toutes ces forces se feront équilibre en chaque point, c'est-à-dire les mouvements qui seront produits ou entretenus par ces seules forces.

14. Équation de l'équilibre hydrodynamique. — Considérons un élément de volume $d\tau$, de densité ρ de masse $dm = \rho\, d\tau$. Soit F l'intensité du champ de forces au point considéré, forces extérieures et forces d'inertie, la force qui agit sur l'élément dm en $d\tau$ sera, en grandeur et en direction, F étant un vecteur,

$$F\, dm = \rho\, F\, d\tau. \tag{1}$$

D'autre part la poussée, due aux pressions internes, est mesurée par le gradient de la pression, ou la dérivée de la pression p par rapport au rayon vecteur r. C'est un vecteur, normal aux surfaces d'égale pression, dirigé vers les pressions croissantes, et que l'on peut écrire, en représentant par n la direction de cette normale et par dn la grandeur de ce déplacement normal,

$$\text{grad}\, p = \frac{dp}{dr} = n\,\frac{dp}{dn}, \qquad n\, dp = dn\,\frac{dp}{dr}, \qquad \frac{dp}{dn} = \left|\frac{dp}{dr}\right|. \tag{2}$$

En désignant par $d\sigma$ la surface de l'élément $d\tau$, tangente à la surface p et dn son épaisseur, la pression sur cet élément de surface pourra s'écrire, d'après (2),

$$-n\, dp\, d\sigma = -dn\, d\sigma\,\frac{dp}{dr} = -\frac{dp}{dr}\, d\tau. \tag{3}$$

Il faut le signe $-$, car la poussée résultante sur les deux faces de l'élément est dirigée vers les pressions décroissantes. Comme l'élément doit être en équilibre sous l'action des deux forces (1) et (3), on aura en tous les points du fluide l'équation vectorielle fondamentale

$$\frac{dp}{dr} = \rho F, \qquad \frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dr} = F. \tag{4}$$

Soient X, Y, Z les composantes de la force résultante F(X, Y, Z) suivant trois axes quelconques, cette équation pourra se décomposer en trois équations algébriques

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \tag{5}$$

Nous appellerons *équilibre hydrodynamique* un état de mouvements quelconques, où cet équilibre interne est réalisé en chaque point. Pour toutes les formules de calcul vectoriel contenues dans ce chapitre on consultera ALEX VÉRONNET, *Le Calcul vectoriel, Cours d'Algèbre* (chez Gauthier-Villars).

15. Première condition d'équilibre. — *Applications.* — Supposons qu'en un point, où l'équilibre est réalisé, d'après (4) pour une densité ρ, se trouve une particule de densité différente ρ'. Alors on voit d'après (1) que la force F dm qui agit sur la particule ρ' est différente de $\frac{dp}{dr}$. Il ne peut donc pas y avoir équilibre interne pour cette particule qui va se déplacer jusqu'à ce qu'elle retrouve les conditions (4), qui seront les mêmes pour toutes les particules de même densité.

On voit que si l'on a $\rho' > \rho$, la seconde particule ρ' va suivre les lignes de forces dans le sens des forces croissantes, qui est le même que celui des pressions croissantes, et par conséquent le même que celui des densités croissantes dans l'état d'équilibre.

Les particules d'égale densité devront donc se répartir en *couches d'égale densité*, qui seront toutes emboîtées les unes dans les autres, où le gradient $\frac{dp}{dr}$ et la force F varient d'une façon continue, en conservant la même direction et la même intensité relative mesurée par ρ. Ces couches d'égale densité ne peuvent pas se couper, autrement on devrait avoir une densité égale à celle des deux couches sur la ligne d'intersection, ce qui est impossible.

L'équation de condition (4) conservera donc les couches d'égale densité, et les mouvements des particules ne pourront se faire, dans l'état d'équilibre hydrodynamique, que sur ces couches d'égale densité.

Applications. — Considérons, par exemple, un liquide de densité ρ, soumis seulement à une vitesse de rotation ω. Désignons par u, le vecteur, qui mesure en direction et grandeur la distance d'une particule à l'axe de rotation, l'équation (4) se réduit à

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 u. \tag{6}$$

La poussée, nulle sur l'axe, croît proportionnellement à la distance à l'axe. Le liquide aspiré sur l'axe de rotation sera refoulé à la périphérie. C'est le principe des pompes centrifuges.

Si dans le liquide de densité ρ, se trouvent des particules de densité différentes, les particules plus lourdes seront repoussées

à la périphérie, comme dans les centrifugeuses, les particules plus légères seront attirées vers l'axe, comme dans les écrémeuses.

16. Les surfaces de niveau coïncident toujours avec les surfaces d'égale pression. — On distinguera donc dans le milieu les surfaces d'égale densité ρ, les surfaces d'égale pression p. On appelle aussi surfaces de niveau, les surfaces qui sont partout normales aux lignes de force, c'est-à-dire au vecteur F. Elles se confondent avec les surfaces d'égale pression.

En effet, la force F d'après (4) est partout parallèle au gradient $\frac{dp}{dr}$, qui est lui-même normal aux surfaces d'égale pression. Il en est donc de même de F.

D'ailleurs, considérons un déplacement élémentaire quelconque dr, autour d'un point du fluide où l'équation (4) est vérifiée, et multiplions cette équation (4) par le vecteur élémentaire dr (produit algébrique), on aura,

$$(7) \qquad dp = \rho \mathrm{F}\, dr, \qquad dr\,\frac{dp}{dr} = dp.$$

Supposons maintenant que ce déplacement ait lieu sur une surface d'égale pression, nous aurons alors $dp = 0$ et par conséquent $\mathrm{F}\,dr = 0$. Or, $\mathrm{F}\,dr$ est le produit algébrique des deux vecteurs F et dr, comme il est nul, les deux vecteurs sont perpendiculaires l'un sur l'autre. Le second dr étant situé sur la surface d'égale pression, F est perpendiculaire à ces surfaces.

17. — La force résultante dérive d'un potentiel, ou bien est normale à son rotationnel ou tourbillon. — La formule (7) est générale quel que soit le déplacement dr. Or dp étant une différentielle exacte, le second membre doit être également une différentielle exacte et ρ doit jouer le rôle de facteur intégrant. Pour cela, il faut et il suffit que le produit algébrique du vecteur F par son rotationnel, ou curl, soit nul. Le rotationnel n'est pas autre chose que la dérivée vectorielle de F par rapport au rayon vecteur r. Il s'écrit $\frac{d \times \mathrm{F}}{dr}$, et l'on aura

$$(8) \qquad \mathrm{F}\,\frac{d \times \mathrm{F}}{dr} = 0. \qquad \mathrm{F}\,\mathrm{W} = 0, \qquad \mathrm{W} = \frac{d \times \mathrm{F}}{dr} = \mathrm{rot}\,\mathrm{F}.$$

Le signe de multiplication $\times$ indique le ***produit vectoriel*** et la *dérivée vectorielle* ou curl.

Cette équation vectorielle s'écrit algébriquement

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+Y\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0. \tag{9}$$

Les parenthèses sont les composantes du rotationnel W.

L'équation (8) a deux solutions. Ou bien le rotationnel est nul, les parenthèses de (9) sont nulles et F dérive d'une fonction de forces V. On a alors

$$F=\frac{dV}{dr}=\text{grad } V, \qquad F\,dr=\frac{dV}{dr}\,dr=dV, \tag{10}$$

C'est le cas le plus commun.

Dans le cas contraire, le rotationnel W doit être partout perpendiculaire à F pour que le produit algébrique des deux vecteurs F et W soit nul, et la densité ρ joue le rôle d'un facteur intégrant. C'est l'équation (8) qui doit être vérifiée.

Si le champ de forces ne vérifie pas cette condition, il n'y a pas d'équilibre possible. Il se produit nécessairement des mouvements tourbillonnaires.

18. La force dérive d'un potentiel. — Alors les surfaces d'égale densité et d'égale pression coïncident avec les surfaces équipotentielles et réciproquement. En effet, on a alors, en désignant par U ce potentiel,

$$F\,dr=dU, \qquad dp=\rho\,dU. \tag{10'}$$

Cette équation montre que si l'on se déplace sur une surface équipotentielle, où U = const., on a $dU=0$ et par conséquent $dp=0$ et la pression reste constante. Les surfaces équipotentielles se confondent donc avec les surfaces d'égale pression. D'ailleurs, dans ce cas, les surfaces équipotentielles ne sont pas autre chose que les surfaces de niveau définies ci-dessus. D'après le n° 16, elles se confondent bien avec les surfaces d'égale pression.

On peut donc exprimer p en fonction de U et réciproquement. Par conséquent, la densité ρ s'exprime aussi en fonction unique-

ment de p ou de U

$$\rho = \frac{dU}{dp} = f(p), \qquad d\rho = f'(p)\,dp.$$

Sur les surfaces d'égale pression on a $dp = 0$ et alors $d\rho = 0$. Les surfaces d'égale densité se confondent donc avec les surfaces d'égale pression et les surfaces équipotentielles.

19. La densité est constante, ou fonction de la seule pression, alors la force doit dériver d'un potentiel. — L'on a en effet $\rho =$ const. ou $\rho = f(p)$, on peut écrire

$$(11) \qquad P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)}, \qquad \frac{1}{\rho}\,dp = dP = F\,dr = dU.$$

Ainsi $F\,dr$ doit être une différentielle exacte, donc dérive d'un potentiel U. Ce potentiel des forces U ne diffère que par une constante, du *potentiel des pressions* P, d'après (11). On dira qu'il y a un potentiel des pressions, ou une fonction des pressions.

On voit que les surfaces P constant coïncident avec les surfaces équipotentielles U constant et par conséquent avec les surfaces d'égale densité et d'égale pression.

Dans le cas d'une force ne dérivant pas d'un potentiel, il n'y a donc aucune forme possible d'équilibre pour une masse homogène. Il se formera nécessairement des mouvements tourbillonnaires.

20. Les surfaces d'égale pression et d'égale densité coïncident. — La force dérive alors d'une fonction U. C'est le problème pratique qui se posera ici. On envisagera plus spécialement la masse hétérogène comme formée de couches d'égale densité, cette densité étant constante et indépendante de la pression, comme dans un liquide incompressible. La température sera regardée comme uniforme. On se donnera la loi de variation des densités sur ces différentes couches et l'on fera coïncider ces surfaces avec celles d'égale pression, en écrivant que la résultante des forces est partout normale à ces surfaces $\rho =$ const.

Soit $f(x, y, z, \alpha) = 0$ l'équation générale de ces surfaces, chacune d'elles étant définie par une valeur particulière du paramètre α. On pourra exprimer la densité ρ et la pression p sur

chacune de ces surfaces en fonction du paramètre α

$$\rho = \varphi(\alpha), \qquad p = \psi(\alpha).$$

En éliminant α on pourrait donc exprimer ρ en fonction de p. La densité ρ, quoique indépendante de p, peut, dans la masse considérée, s'écrire comme fonction de la seule pression et d'après le numéro précédent la force doit également dériver d'un potentiel.

21. **La force ne dérive pas d'un potentiel.** — Les surfaces d'égale densité ρ et d'égale pression p ne peuvent pas coïncider, et réciproquement. La densité ρ ne peut pas s'exprimer en fonction de la seule pression et réciproquement. Cela découle des démonstrations précédentes. Alors, pour qu'il y ait équilibre, la force doit être partout normale à son tourbillon.

En résumé, dans le cas d'équilibre d'un fluide, l'existence du potentiel des forces U entraîne celle du potentiel des pressions P et la coïncidence des trois surfaces ρ, p, U constants, et réciproquement. Nous aurons donc deux cas bien distincts suivant que le champ de forces sera *tourbillonnaire* ou non.

22. **Cas de la température.** — Pour un fluide en général elle est déterminée en fonction de la densité et de la pression par l'équation caractéristique du fluide $\varphi(p, \rho, T) = 0$. Dans le cas d'un gaz parfait, par exemple, on a

$$pv = RT, \qquad p\mu = R\rho T,$$

où v est le volume moléculaire, μ le poids moléculaire, R la constante des gaz, T la température absolue.

Si les surfaces d'égale densité et d'égale pression coïncident, il en est de même des surfaces isothermes T = const., car d'après l'équation caractéristique, p et ρ ayant la même valeur sur ces surfaces, il en est de même de T.

Si les surfaces p et ρ constants ne coïncident pas, elles se coupent suivant une courbe où p et ρ sont constants, et par conséquent T aussi. Les trois familles de surfaces se coupent suivant les mêmes courbes.

23. **Introduction de l'accélération cinétique.** — Si le fluide

n'est pas au repos, chaque molécule dont la trajectoire est limitée sur la surface d'égale densité, et non rectiligne et uniforme, subit une accélération J, due à la force réelle F et à la pression p, définie par les équations hydrodynamiques (4) ou (5). On dira qu'il y a *équilibre hydrodynamique* si l'accélération J obéit précisément à ces relations. Cette expression s'appliquera plus spécialement au mouvement permanent stationnaire. Les équations générales hydrodynamiques s'écriront, en explicitant cette *accélération cinétique*

$$(12) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \mathrm{F} - \mathrm{J}, \qquad dp = \rho(\mathrm{F} - \mathrm{J})\,dr, \qquad \mathrm{J} = \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Les surfaces de niveau sont celles qui sont normales à la force résultante F — J. Elles coïncident avec les surfaces d'égale pression d'après le n° 16. Elles se confondent avec les surfaces équipotentielles, si F — J ou si F et J dérivent d'un potentiel d'après le n° 18.

24. Il y a un potentiel des pressions ou une fonction des pressions. — Alors la densité est constante, ou fonction de la seule pression, ou les surfaces de densité constante et de pression constante coïncident, d'après le n° 21, *résumé*. Il s'ensuit que F — J dérive d'une fonction U ou d'un potentiel. Dans ce cas les surfaces ρ, p, P, U, qui passent au même point r, coïncident et les réciproques sont vraies.

On a alors les relations

$$(13) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{d\mathrm{U}}{dr}, \qquad dp = \rho\, d\mathrm{U} = \rho\, d\mathrm{P}.$$

Pour que la force résultante F — J dérive d'un potentiel, il faut et il suffit que son rotationnel soit nul. On a la condition

$$(14) \qquad \frac{d\times(\mathrm{F} - \mathrm{J})}{dr} = 0, \qquad \frac{d\times \mathrm{F}}{dr} = \frac{d\times \mathrm{J}}{dr}.$$

Le rotationnel ou le tourbillon de la force réelle doit être, en chaque point, égal à celui de l'accélération cinétique J.

Si la force F dérive d'une fonction potentiel V, son rotationnel est nul. Il en est de même de celui de J et l'accélération J dérive également d'un potentiel Q. On dit alors qu'il y a un *potentiel des*

accélérations, ou une *fonction des accélérations*. On a

$$(15)\qquad F = \frac{dV}{dr}, \qquad -J = \frac{dQ}{dr}, \qquad \frac{1}{\rho}\,dp = dP = dV + dQ,$$

$$P = U = V + Q + \text{const.}$$

Réciproquement s'il y a une fonction des accélérations Q, il y aura également une fonction des forces V et l'on aura les mêmes relations (15). S'il y a à la fois une fonction des forces V et une fonction des accélérations Q, il y aura une fonction des pressions P.

25. **Il n'y a pas de potentiel des pressions.** — Les surfaces de densité constante ne peuvent pas coïncider avec celles à pression constante. Il faut alors que la force résultante F — J soit partout normale à son tourbillon ou rotationnel, qui n'est pas nul, puisque la force ne dérive pas d'un potentiel. La condition s'écrit

$$(16)\qquad (F - J)\left(\frac{d \times F}{dr} - \frac{d \times J}{dr}\right) = 0.$$

S'il y a une fonction des accélérations Q, sans qu'il y ait une fonction des forces ou des pressions, le rotationnel de J est nul et (16) s'écrit

$$(17)\qquad \left(F + \frac{dQ}{dr}\right)\frac{d \times F}{dr} = 0, \qquad \frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dr}\,\frac{d \times F}{dr} = 0.$$

Le rotationnel de la force F doit être, en chaque point normal, au gradient des pressions $\frac{dp}{dr}$ qui est précisément normal à la surface p = const. qui passe en ce point. Le rotationnel de la force doit donc être en chaque point tangent à la surface d'égale pression.

L'équation (12) s'écrirait d'ailleurs dans ce cas

$$(18)\qquad \frac{dQ}{dr} = F - \frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dr}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d \times F}{dr} = \frac{d \times}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dr}\right),$$

car le rotationnel d'un gradient $\frac{dQ}{dr}$ est toujours nul.

En multipliant la seconde expression par $\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dr}$, le second membre serait nul, comme triple produit contenant deux vecteurs égaux. On retrouverait la seconde équation (17).

CHAPITRE III.

ÉQUILIBRE RELATIF.

---

26. Exposé du problème et résultats. — Nous supposons dans le problème envisagé ici une masse hétérogène isolée. Nous supposerons en premier lieu qu'elle se déplace en bloc comme un corps solide. Les distances relatives de toutes les molécules restent alors les mêmes. La forme et la disposition intérieure de toutes les couches d'égale densité restent les mêmes. Nous pouvons donc lier à la masse un système d'axes mobiles, qui seront entraînés avec elle. La vitesse relative de chaque molécule par rapport à ces axes mobiles est nulle à chaque instant. Il y a équilibre relatif.

Le mouvement le plus général de la masse est le même que celui du système d'axes. Il se ramène à une translation et une rotation. La translation est la même que celle du centre de gravité, c'est-à-dire un mouvement rectiligne et uniforme. Il n'introduit pas d'accélération nouvelle. On peut supposer cette vitesse nulle.

Le mouvement le plus général de la masse fluide autour de son centre de gravité sera donc régi par les équations d'Euler, comme pour un corps solide. Ce serait un mouvement à la Poinsot, la masse étant considérée comme isolée et les forces extérieures étant nulles ou négligeables.

Mais ici les équations de l'équilibre des fluides introduisent des conditions nouvelles. Nous allons voir que ce mouvement se réduit à une *rotation constante* en grandeur et en direction autour d'un *axe fixe* et que cet axe fixe doit être un des axes principaux d'inertie de notre masse invariable, assimilée à un corps solide. Cette démonstration est due à H. Poincaré, (*Figures d'équilibre*, Chap. II), dans le cas d'une masse homogène. Elle a été reprise par P. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle*, t. 4, 1[er] fasc.,

n° 16, et étendu ensuite au cas de la masse hétérogène (*C. R. Ac. Sc.* et *Acta mathematica*).

On verra ensuite que les surfaces de niveau et d'égale densité sont de révolution et symétriques par rapport au plan équatorial. On étudiera les relations générales qui définissent ces surfaces.

27. Équation générale de l'équilibre relatif. — La vitesse en chaque point, dans le mouvement relatif, est due uniquement à une vitesse de rotation ω, qui est la même à chaque instant, pour tout les points, en grandeur et en direction. La direction de ce vecteur définit celle de l'axe de rotation, qui peut varier avec le temps, dans le cas général. On aura

$$(1) \qquad v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r, \qquad \omega' = \frac{d\omega}{dt};$$

Le vecteur vitesse v est défini en chaque point par le produit vectoriel de ω et du rayon vecteur r du point.

L'accélération cinétique d'entraînement de chaque point sera donnée par

$$(2) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \omega' \times r + \omega \times v = \omega' \times r + \omega \times (\omega \times r).$$

Le second terme est l'accélération centrifuge.

L'équation générale de l'équilibre hydrodynamique, Chap. II, n° 23, s'écrira

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = F - a = F - \omega' \times r - \omega \times (\omega \times r).$$

D'après une règle du produit vectoriel de trois vecteurs l'accélération centrifuge peut s'écrire

$$(4) \qquad \omega \times (\omega \times r) = \omega r.\omega - \omega^2.r, \qquad \omega r = px + qy + sz,$$

où ωr est le produit algébrique des deux vecteurs $\omega(p, q, s)$ et $r(x, y, z)$.

28. Cas d'une masse soumise à la gravitation. — Dans ce cas la force F dérive d'un potentiel V. Il en est de même d'ailleurs toujours de l'accélération centrifuge, on a

$$(5) \qquad F = \operatorname{grad} V = \frac{dV}{dr}, \qquad \omega \times (\omega \times r) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(\omega \times r)^2.$$

Comme $w' \times r$ dans (3) ne dérive pas d'une fonction, il n'y a pas de fonction des pressions ni des accélérations. La force totale, second membre de (3) doit être normale à son rotationnel, (8), n° 17.

Or le rotationnel des deux termes (5) est nul, car le rotationnel d'un gradient est toujours nul. Il ne reste que le rotationnel de $w' \times r$, qui est égal à $2w'$. On a en effet, d'après la formule développée d'un produit vectoriel de trois vecteurs,

$$\frac{d\times}{dr}(w' \times r) = \frac{dr}{dr} \cdot w' + r\,\frac{d}{dr} \cdot w' - \frac{dw'}{dr} \cdot r - w'\,\frac{d}{dr} \cdot r = 3w' - w' = 2w'.$$

En effet les dérivées de w', par rapport au rayon vecteur r, sont nulles, car w doit rester le même pour tous les points, donc w' également. Il reste le premier terme, où $\frac{dr}{dr}$ est la divergence du rayon vecteur, égale à 3, et le dernier terme, qui donne la dérivée de r dans la direction du vecteur w', qui est égale à ce vecteur w', d'où la valeur $2w'$.

D'après le n° 17 le produit vectoriel de ce rotationnel par le second membre de (3) doit être nul. On aura

$$(6) \qquad w'[\mathrm{F} - w' \times r - w \times (w \times r)] = w'[\mathrm{F} - w \times (w \times r)] = 0.$$

Car le produit algébrique $w'(w' \times r)$ est nul, comme contenant deux vecteurs égaux. L'expression ci-dessus est le produit algébrique de w' avec le vecteur contenu dans le crochet. Pour que le produit soit nul il faut que les deux vecteurs soient nuls ou perpendiculaires l'un sur l'autre. Or le crochet représente la résultante de la force de la gravitation et de la force centrifuge, qui ne peut pas être nulle ni normale partout au vecteur unique w', puisque cette résultante est partout normale aux surfaces de niveau et d'égale pression. Donc $w' = 0$.

Le vecteur vitesse de rotation doit être constant en direction et grandeur. L'axe de rotation doit être *fixe* dans l'espace. Il ne peut pas y avoir de mouvement à la Poinsot, comme pour un corps solide.

29. La rotation se fait autour d'un des axes principaux d'inertie. Stabilité. — Le mouvement de la masse se fait ici comme celui

d'un corps solide. Il est donc défini par les équations d'Euler

$$A p' + (C - B) q r = L. \tag{7}$$

Or ici le moment des forces extérieures est nul, de même que w' et ses composantes p', q', r'. Ces équations se réduisent à

$$(C - B) q r = 0, \qquad (A - C) r p = 0, \qquad (B - A) p q = 0.$$

Il faut que deux des composantes de la rotation soient nulles, pour vérifier ces trois équations. La rotation se réduit donc à une seule des composantes suivant l'un des axes.

Pour un corps solide la rotation est stable si elle se fait autour du grand axe ou du petit axe. Elle est instable autour de l'axe moyen. Il en sera de même à plus forte raison pour un fluide. La rotation ne pourra donc avoir lieu qu'autour du grand ou du petit axe de l'ellipsoïde d'inertie.

Nous verrons que la figure doit être de révolution. La rotation devra se faire autour de l'axe de révolution, qui sera le petit axe de figure, car la force centrifuge allongera la masse perpendiculairement à cet axe.

30. **Équation réduite de l'équilibre relatif.** — En désignant par u le rayon vecteur d'un point quelconque par rapport à l'axe de rotation fixe, la force centrifuge pourra s'écrire $+\omega^2 u$, où ω est la mesure de la vitesse algébrique. L'équation vectorielle (3) de l'équilibre relatif devient

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} + \omega^2 u. \tag{8}$$

Les deux termes du second membre dérivent d'une fonction. Il en est de même du premier membre, qui dérive également d'une fonction U. En intégrant, on pourra écrire, à une constante près,

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2 u^2 = V + Q, \qquad u^2 = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Le second membre de (8), résultante de l'attraction et de la force centrifuge est la pesanteur, mesurée par le vecteur g,

$$g = \frac{dU}{dr} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} + \omega^2 u, \qquad dp = \rho\, g\, dr, \tag{10}$$

$g\,dr$ est le produit algébrique des deux vecteurs g et dr. Le sens positif de dr est opposé à celui de g. En remplaçant dans (10, 2), ces vecteurs par leurs valeurs algébriques, il faudra mettre le signe —.

En prenant l'axe de rotation pour axe des z, l'équation vectorielle (8) donnera les trois équations algébriques

$$(11)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

31. Les surfaces de niveau et d'égale densité doivent être de révolution. — Comme la force en chaque point dérive d'une fonction des forces U, il y a également une fonction des pressions P et les surfaces de niveau ou d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale densité, n° 21 *résumé*.

Considérons l'intersection d'une surface d'égale densité ou de niveau $U = U_0$ par une surface équipotentielle $V = V_0 = \text{const.}$ L'équation (9) donne pour tous les points de cette intersection

$$(12)\qquad Q = \frac{1}{2}\omega^2 u^2 = U_0 - V_0 = \text{const.}, \qquad u^2 = x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Cette intersection est donc un cercle de rayon u normal à l'axe Oz. Les sections des surfaces d'égale densité et des surfaces équipotentielles sont donc toutes des cercles plans parallèles et perpendiculaires à l'axe. Ces surfaces sont donc de révolution par rapport à l'axe de rotation Ox.

Si la densité est constante, on ne peut pas définir une courbe d'intersection de ρ et U et la démonstration est en défaut. On sait dans ce cas que les figures d'équilibre relatif peuvent être des ellipsoïdes à trois axes (voir *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 4, 1er fasc.).

Si l'on savait seulement qu'il y a une fonction des pressions P, cela entraînerait qu'il y a une fonction des forces U et le cas serait le même.

32. Les surfaces sont symétriques par rapport au plan équatorial moyen. — La première démonstration de ce théorème est due à Lichtenstein.

Quand la masse est à l'état de repos, elle prend la forme sphérique, qui est la seule figure d'équilibre (Liapounoff, Poincaré). Il y a alors symétrie par rapport à tous les plans et tous les axes passant par le centre de gravité. La rotation introduit le champ de forces centrifuges, normal à l'axe de rotation, le champ de forces conserve donc la symétrie par rapport à l'axe de rotation et les surfaces sont de révolution par rapport à cet axe, comme on vient de le voir [1]. Il doit conserver aussi la symétrie par rapport au plan médian perpendiculaire à cet axe. Il n'y a *aucune raison* pour qu'il s'introduise une dissymétrie par rapport à ce plan. Les surfaces symétriques par rapport à ce plan sont certainement *une solution* répondant aux conditions de l'équilibre.

Or les surfaces d'égale densité, ou d'égale pression U, ainsi que les surfaces équipotentielles V, sont fermées et coupent deux fois l'axe de rotation. Toute surface cylindrique Q coupe donc deux fois ces surfaces. D'après l'équation précédente (12), l'intersection des deux surfaces U_0 et V_0 se fait les deux fois sur un *cercle de même rayon* u. Il en est de même pour toutes ces surfaces et pour toutes leurs intersections. Tous les anneaux de même densité de ces intersections se situent de la même façon les uns par rapport aux autres, à droite et à gauche, parallèlement à l'axe de rotation et aussi normalement à cet axe. La *disposition relative* de ces deux moitiés de surfaces est donc identique à droite et à gauche. Tout plan normal à l'axe Ox, aura un *plan correspondant*, qui contiendra les mêmes anneaux de même densité, correspondant aux mêmes surfaces d'intersection. Il suffit de montrer que ces deux plans doivent être symétriques.

Considérons alors la composante de l'équation d'équilibre correspondant à l'axe de rotation (11,3). Comme les surfaces sont de révolution, la pression p s'exprime en fonction de u et de z. En supposant le problème résolu, les surfaces d'égale densité connues, on pourra exprimer p et V en fonction de z seul. Multiplions alors cette équation (11,3) par dz et intégrons sur l'axe de rotation de zéro à la même couche de densité ρ. Désignons par z et z' les deux limites, supposées différentes à droite et à gauche, on aura en

---

[1] Dans le cas de la densité constante, il y avait *une autre* solution introduite par le fait de l'indétermination des couches de densité constante.

chaque point

$$p_0 - p = \int_0^z \rho \frac{\partial V}{\partial z} dz = \int_0^{z'} \rho \frac{\partial V}{\partial z} dz,$$

comme on doit avoir la même pression p sur tous les points correspondant à la même densité ρ, il faut $z = z'$. Les couches doivent être symétriques.

33. **La pesanteur. Formule de Poincaré.** — La formule vectorielle (10) dérivée de nouveau par rapport au rayon vecteur r donne

$$(13) \qquad \Delta U = \frac{dg}{dr} = \frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} + \omega^2 \frac{du}{dr} = -4\pi f \rho + 2\omega^2,$$

$\frac{dg}{dr}$ est la divergence de la pesanteur en chaque point, $\frac{d^2 U}{dr^2}$ est la divergence du gradient $\frac{dU}{dr}$ de U, ou son laplacien ΔU, et $\frac{d^2 V}{dr^2}$ est de même le ΔV égal à $-4\pi f \rho$ d'après l'équation de Poisson. Enfin $\frac{du}{dr}$ est la divergence de u égale à 2, en effet on a, ξ et η étant les directions des axes Ox et Oy,

$$(14) \qquad u = \xi x + \eta y, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2, \qquad u^2 = x^2 + y^2.$$

Multiplions (13) par le volume élémentaire $d\tau$ et intégrons dans tout le volume intérieur à une surface de niveau S, on aura

$$(15) \qquad \int_V \frac{d^2 U}{dr^2} d\tau = 2\omega^2 \int_V d\tau - 4\pi f \int_V \rho \, d\tau.$$

Les deux dernières intégrales donnent le volume T et la masse M renfermés dans la surface S. La formule de la divergence permet de transformer la première intégrale en une intégrale de surface, étendue à S, d'après (10) [*voir* Alex Véronnet, *Le Calcul vectoriel, Cours d'Algèbre*, Chap. 13 (chez Gauthier-Villars)]

$$(16) \qquad \int_V \frac{d^2 U}{dr^2} d\tau = \int_S \frac{dU}{dr} dS = \int_S g \, dS = 2\omega^2 T - 4\pi f M,$$

c'est la *formule de Poincaré*. $g \, dS$ est le produit algébrique des deux vecteurs g et dS, où la face positive de dS est définie par la normale extérieure. On a donc partout $g \, dS < 0$ et, en désignant

par D la densité moyenne dans S,

$$(17)\qquad \omega^2 < 2\pi f D, \qquad M = DT.$$

En désignant par G la valeur positive moyenne de g sur la surface S, de rayon moyen R, on aura

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_S g\, dS = -GS = 2T(2\pi f D - \omega^2), \\ &T = \frac{1}{3} SR, \qquad \frac{3}{2}\frac{G}{R} = 2\pi f D - \omega^2. \end{aligned} \right.$$

34. La pesanteur. Formule de Bruns. — Considérons la formule (13) qui donne la divergence de la pesanteur $\frac{dg}{dr}$. Désignons par γ la direction du vecteur de la pesanteur, où g désignera sa valeur numérique, on aura pour l'expression de cette divergence

$$(19)\qquad \frac{dg}{dr} = \frac{d}{dr}(\gamma g) = \gamma \frac{dg}{dr} + g\frac{d\gamma}{dr} = \frac{dg}{dn} - g\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{dg}{dn} - 2\frac{g}{R}.$$

Le premier terme du second membre, dérivée de g dans la direction de γ, normale à la surface de niveau S, s'écrit $\frac{dg}{dn}$. Dans le second terme $\frac{d\gamma}{dr}$ est la divergence de cette normale γ. En prenant comme axes, au point considéré, cette normale et les deux directions principales m, p on aura

$$\frac{d\gamma}{dr} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial n} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial m} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R}.$$

Le premier terme, variation de γ suivant la normale est nul. Dans le second, $\partial\gamma_2$ représente l'angle de deux tangentes, ou de deux normales voisines pour un déplacement ∂m sur la surface. La dérivée est donc égale à la courbure, ou à l'inverse du rayon de courbure R_1. Le troisième terme est de même l'inverse de R_2 et R est le rayon de courbure moyen, d'où la formule (19).

En remplaçant dans (13), la divergence de la pesanteur par sa valeur (19), on aura la *formule de Bruns*

$$(20)\qquad \frac{dg}{dn} = 2\frac{g}{R} + 2\omega^2 - 4\pi f\rho = 2cg + 2\omega^2 - 4\pi f\rho,$$

c, étant la courbure moyenne.

35. Équation de condition des surfaces de niveau. — Les surfaces de niveau peuvent s'écrire $S = \varphi(x, y, z)$ ou $S = \varphi(r)$ en supposant chaque point de cette surface défini par son rayon vecteur $r(x, y, z)$. Chaque valeur S_1 donnée à S définit l'une de ces surfaces, sur laquelle S ou $\varphi(r)$ est constant. Ces surfaces ne peuvent pas se couper et s'emboîtent les unes dans les autres. Comme ces surfaces sont de révolution, la section méridienne peut être définie par un seul paramètre variable σ par exemple $S = \varphi(r, \sigma)$. La famille des ellipsoïdes de révolution pourra s'écrire

$$(21) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad S = c^2 = \sigma(x^2+y^2) + z^2, \qquad \sigma = \frac{c^2}{a^2},$$

c représente le rayon polaire et définit la *grandeur* de la surface, σ carré du rapport des axes en définit la forme.

Dans la formule générale (9) U est constant sur la même surface de niveau, variable avec chacune de ces surfaces. Ce sera donc une fonction de S. Si l'on donne à S une valeur constante S_1, on aura la valeur correspondante constante U_1. Prenons le gradient de cette fonction, on aura

$$(22) \qquad U = f(S), \qquad \frac{dU}{dr} = \frac{df}{dS}\frac{dS}{dr}.$$

Prenons de nouveau la dérivée, par rapport au rayon vecteur, c'est-à-dire la divergence de ce gradient, nous aurons

$$(23) \qquad \frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d^2f}{dS^2}\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{df}{dS}\frac{d^2S}{dr^2}.$$

Le premier terme est le laplacien ΔU de U, qui peut être remplacé par sa valeur (13) en ρ et ω^2, avec $\Delta U < 0$. La fonction f sera définie par une équation différentielle du second ordre.

36. Relation entre la vitesse de rotation et l'équation des surfaces de niveau et d'égale densité. — Si la surface extérieure et les surfaces de niveau sont supposées données par une relation $S(x, y, z)$ la normale à cette surface et ses composantes pourront s'écrire $\frac{dS}{dr}\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right)$. La force doit être en chaque point normale à ces surfaces et ses composantes (11) doivent être pro-

portionnelles à celles de $\frac{dS}{dr}$. On peut supposer que les surfaces ne sont pas de révolution pour envisager le cas d'un astre perturbateur. On a les relations

$$(24)\qquad (X + \omega^2 x) : \frac{\partial S}{\partial x} = (Y + \omega^2 y) : \frac{\partial S}{\partial y} = Z : \frac{\partial S}{\partial z},$$

on en tire, pour la valeur de la vitesse de rotation ω,

$$(25)\qquad \omega^2 = \frac{Z}{x}\frac{\partial S}{\partial x} : \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{X}{x} = \frac{Z}{y}\frac{\partial S}{\partial y} : \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{Y}{y},$$

valeur qui doit être la même en chaque point de la masse. L'élimination de ω^2 donne encore l'équation de condition entre X, Y, Z et les directions normales, équation qui doit être vérifiée de même, et qui est indépendante de la vitesse de rotation

$$(26)\qquad \left(\frac{X}{x} - \frac{Y}{y}\right)\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{Z}{x}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Z}{y}\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Étudions par exemple, le cas où les surfaces de niveau sont ellipsoïdales. Elles le seront sensiblement si la vitesse de rotation ω est faible. Soit l'équation de l'ellipsoïde passant par le point $P(x, y, z)$ et les composantes de sa normale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \frac{x}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2},$$

on aura

$$\left(\frac{X}{x} + \omega^2\right)a^2 = \left(\frac{Y}{y} + \omega^2\right)b^2 = \frac{Z}{z}c^2,$$

$$(27)\qquad \omega^2 = \frac{c^2}{a^2}\frac{Z}{z} - \frac{X}{x} = \frac{c^2}{b^2}\frac{Z}{z} - \frac{Y}{y}, \qquad \frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{Z}{z}.$$

Dans le cas des surfaces de révolution, on a

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} \qquad \text{et} \quad b = a \qquad \text{ou} \quad \frac{1}{x}\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Ces relations qui s'équivalent, remplacent l'équation de condition et la vérifient identiquement.

37. Mouvement relatif dans le cas général. Imposibilité du mouvement à la Poinsot. — Nous avons établi au n° 28 que, dans le cas d'une masse soumise à la gravitation, elle devait tourner

autour d'un axe fixe. Il en est encore de même quand la force F est quelconque, et ne dérive pas d'un potentiel.

En effet l'ensemble des forces est toujours donné par le second membre de (3). Pour que dp soit une différentielle exacte, et que ρ joue le rôle de facteur intégrant, il faut que le produit algébrique de la résultante de ces forces par son rotationnel soit nul. Or le rotationnel de la force centrifuge est toujours nul, celui de $w' \times r$ est encore $2w'$, on obtient l'expression

$$(28) \qquad \left(\frac{d \times \mathrm{F}}{dr} - 2w'\right)[\mathrm{F} - w' \times r - w \times (w \times r)] = 0.$$

En effectuant le produit, on aura, d'après les règles du produit algébrique de trois vecteurs,

$$w'(w' \times r) = 0, \qquad (w' \times r)\frac{d \times \mathrm{F}}{dr} = w'\left(r \times \frac{d \times \mathrm{F}}{dr}\right)$$

et l'équation (28) s'écrira en mettant w' en facteur

$$(29) \quad w'\left[2\mathrm{F} - 2w \times (w \times r) + r \times \frac{d \times \mathrm{F}}{dr}\right] = [\mathrm{F} - w \times (w \times r)]\frac{d \times \mathrm{F}}{dr}.$$

Si la force F dérivait d'un potentiel, son rotationnel serait nul, le second terme également, on retrouverait (6).

Le second membre de (29) est un produit algébrique de deux vecteurs, dont nous représenterons la valeur par S. Le premier membre est également un produit algébrique de w', composantes p', q', s', avec le vecteur renfermé dans le crochet, dont nous représenterons les composantes par P, Q, R. L'équation (29) pourra s'écrire

$$(30) \qquad \mathrm{P}p' + \mathrm{Q}q' + \mathrm{R}s' = \mathrm{S}.$$

Considérons l'équation des moments de rotation H^2 et des forces vives h de la masse.

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}s^2 = h, \qquad \mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2s^2 = \mathrm{H}^2.$$

Ces quantités sont constantes, les dérivées par rapport au temps sont nulles, on obtient

$$(31) \qquad \mathrm{A}pp' + \mathrm{B}qq' + \mathrm{C}ss' = 0, \qquad \mathrm{A}^2pp' + \mathrm{B}^2qq' + \mathrm{C}^2ss' = 0.$$

La formule (30) forme avec (31) un système d'équations linéaires, qui donne les composantes p', q', s' de l'accélération ω' de la vitesse de rotation, par

$$(32) \qquad p' = \frac{D_1}{D}, \qquad q' = \frac{D_2}{D}, \qquad s' = \frac{D_3}{D},$$

où D est le déterminant du système et D_1, D_2, D_3, ceux que l'on en déduit en remplaçant P, Q, R par S,

$$(33) \quad \begin{cases} D = PBCqs(C-B) + QACps(A-C) + RABpq(B-A) = 0, \\ D_1 = SBCqs(C-B), \qquad D_2 = SACps(A-C), \qquad \ldots, \end{cases}$$

Or, pour que l'équilibre relatif se conserve, il faut que $\omega'(p', q', s')$ soit le même pour tous les points, à chaque instant. Les rapports (32) doivent être constants dans toute la masse. Or les seuls éléments variables sont P, Q, R dans D et S dans D_1, D_2, D_3. On doit avoir

$$(34) \qquad \frac{S}{D} = c, \qquad S = cD,$$

c étant une constante, pour tous les points à chaque instant, mais qui peut être fonction du temps t. Cette relation, qui dépend de r et t, ou de x, y, z, t, représente une surface déformable. La condition (29) ne peut être vérifiée que pour ces points, et non pour la masse totale.

L'équilibre relatif est alors impossible. Pour qu'il y ait une solution, il faut que le système linéaire soit rendu homogène $S = 0$ dans (30) et que son déterminant D soit nul. L'équation (29) donne alors les deux conditions

$$(35) \qquad \omega' = 0, \qquad S = [F - \omega \times (\omega \times r)] \frac{d \times F}{dr} = 0.$$

La vitesse de rotation ω doit être constante en direction et en grandeur. La masse doit tourner autour d'un axe fixe.

La force totale se réduit au crochet de (35,2) et cette équation représente bien la condition générale, où la force totale doit être normale à son rotationnel.

En représentant par V le vecteur, qui multiplie ω' dans (29), par V_1 la valeur de sa projection sur ω' et par ω' la grandeur de

ce dernier vecteur, on peut écrire (29) sous la forme simple

$$(29') \qquad \omega' V = S, \qquad \omega' V_1 = S, \qquad \frac{S}{V_1} = \omega' = \text{const.}$$

$S : V_1$ est une fonction du point r et du temps t, qui égalée à ω', constante pour toute la masse, et ne peut pas s'étendre à tous les points.

La seule solution possible est (35) $\omega' = 0$ et $S = 0$.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT PERMANENT.

38. **Exposé du problème et résultats.** — Dans le cas du mouvement relatif, toute la masse se meut comme un corps solide. Dans le mouvement permanent, défini en hydrodynamique, les molécules peuvent avoir des vitesses différentes quelconques. Les vitesses et les accélérations sont astreintes seulement à reprendre les mêmes valeurs aux mêmes points. Les molécules suivent donc les mêmes trajectoires, qui forment des *filets fluides* également *permanents*. Comme les molécules de même densité sont astreintes à rester sur les mêmes surfaces d'égale densité (n° 15), ces surfaces seront encore des *surfaces permanentes*. Les différents éléments, forces, pressions, surfaces, trajectoires, ne dépendent plus du temps. On a un véritable *régime stable*, un véritable état d'équilibre.

Le problème, qui se pose ici, sera donc de définir, d'après les lois et formules du mouvement permanent, *la forme la plus générale* de ces filets fluides et de ces surfaces, ainsi que les *vitesses les plus générales*, qui seront compatibles avec l'équilibre hydrodynamique. Nous ne ferons qu'appliquer à ce problème les résultats exposés en hydrodynamique dans le Tome III de ce *Traité de Mécanique rationnelle* de P. Appell.

39. **Expression de l'accélération en fonction de la vitesse. Équation d'Euler.** — L'accélération a est la dérivée de la vitesse v par rapport au temps. Elle dépend du temps de deux façons : directement, accélération à l'instant t, et par la position de la particule considérée, en un point défini par l'extrémité de son rayon vecteur r, accélération locale. On aura, comme pour le cas d'une

fonction de plusieurs variables, a, v, r étant des vecteurs,

$$(1)\qquad a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}\cdot v + \frac{\partial v}{\partial t} = v\frac{d}{dr}\cdot v + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Le mouvement étant permanent, la vitesse en un point ne varie pas par rapport au temps et le dernier terme est nul, v_1, v_2, v_3 étant les composantes de la vitesse $v = \frac{dr}{dt}$, et $v\frac{d}{dr}$ étant le produit algébrique des deux vecteurs v et $\frac{d}{dr}$, on a

$$(2)\qquad v\frac{d}{dr}\cdot v = v_1\frac{\partial v}{\partial x} + v_2\frac{\partial v}{\partial y} + v_3\frac{\partial v}{\partial z}.$$

L'équation générale d'hydrodynamique pourra s'écrire

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \mathrm{F} - v\frac{d}{dr}\cdot v - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

En écrivant les trois composantes de cette équation vectorielle, suivant les trois axes, nous aurons les trois équations d'Euler

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - \left(v_1\frac{\partial u}{\partial x} + v_2\frac{\partial u}{\partial y} + v_3\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

S'il y a une fonction des accélérations Q, on pourra écrire

$$(4)\qquad v\frac{d}{dr}\cdot v + \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{F} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{d\mathrm{Q}}{dr} = \frac{d^2r}{dt^2}.$$

40. Expressions des accélérations en fonction du tourbillon. Équations d'Helmholtz. — Considérons le tourbillon W de la de la vitesse v, défini comme la moitié du rotationnel de la vitesse v, et formons le produit vectoriel de la vitesse par son rotationnel, on aura, d'après les formules du triple produit vectoriel,

$$(5)\qquad 2\mathrm{W} = \frac{d\times v}{dr}, \qquad 2v\times\mathrm{W} = v\times\frac{d\times v}{dr} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} - v\frac{d}{dr}\cdot v.$$

Or v^2, carré de la vitesse, est une fonction algébrique, et $\frac{dv^2}{dr}$ est le gradient de cette fonction, dont le rotationnel sera nul.

En portant l'expression $v\frac{d}{dr}\cdot v$, tirée de (5), dans (3), l'équation

d'Euler s'écrira

$$(6)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = F - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} + 2v \times W - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

S'il y a une fonction des accélérations Q, les deux derniers termes devront être également le gradient d'une fonction H, qui peut dépendre du temps t avec v. On aura

$$(7)\qquad 2v \times W - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dH}{dr} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} - \frac{dQ}{dr}.$$

En multipliant par dr, et intégrant, on aura, pour tout le fluide, l'équation d'Helmholtz,

$$(8)\qquad H = \frac{1}{2}v^2 - Q + \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad H = \frac{1}{2}v^2 + U - V + \text{const.}$$

On aura cette dernière forme s'il y a à la fois une fonction des pressions P ou U et une fonction des forces extérieures V.

En transformant l'équation (6) on obtiendrait facilement l'équation d'Helmholtz, en fonction du tourbillon W, sous la forme

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}\frac{W}{\rho} = \frac{W}{\rho}\frac{d}{dr}.v.$$

11. Champ irrotationnel des accélérations. — On pourrait considérer le cas où le tourbillon des vitesses serait nul, $W = 0$. Alors l'accélération se réduirait au gradient de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr}$ d'après (6). Cette accélération dériverait donc d'un potentiel, mais d'une façon spéciale et restrictive. Il vaut mieux considérer le *cas général*, où l'accélération dérive d'une fonction Q. On sait qu'alors le rotationnel des accélérations est nul. Le champ des accélérations n'est pas tourbillonnaire, ou est un champ irrotationnel. Nous verrons que le mouvement permanent se partage en *deux cas bien distincts*, suivant que cette condition est, ou n'est pas réalisée.

Dans le problème pratique envisagé ici, les forces réellement agissantes, attractions mutuelles, dérivent d'un potentiel. Si la même condition est réalisée pour les accélérations, ou les forces d'inertie, on aura donc un *champ de forces total irrotationnel*. Dans ce cas il y aura une fonction des pressions P, les surfaces de

niveau coïncideront avec les surfaces d'égale densité et seulement dans ce cas.

Il ne faudra donc pas confondre le mouvement irrotationnel, où il y a un potentiel des vitesses, où le tourbillon des vitesses est nul, et le champ irrotationnel des accélérations. Dans le premier cas, le champ des accélérations est également irrotationnel, mais la réciproque n'est pas vraie.

42. Vitesse le long d'un filet fluide. Équation de Bernouilli. — Soit $ds = |dr|$ la longueur du déplacement élémentaire dr, qui définit le vecteur vitesse, $\frac{dr}{ds}$ sera la direction du déplacement sur la trajectoire d'une molécule. Si l'accélération a dérive d'une fonction Q, on pourra écrire

$$(10) \qquad v = \frac{dr}{dt}, \qquad a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dQ}{dr}, \qquad \frac{dr}{ds}\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dr}{ds}\frac{dQ}{dr}.$$

Dans la dernière équation, le premier membre est la dérivée du carré de la vitesse, le second est la dérivée de Q par rapport à s,

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{dQ}{ds}, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2 - Q\right) = 0.$$

En intégrant par rapport à s, le long de la trajectoire, on obtient l'*équation de Bernouilli*

$$(12) \qquad H = \frac{1}{2}v^2 - Q = \text{const.}$$

La fonction H est *constante tout le long d'une trajectoire*, ou d'un filet fluide.

Supposons que les forces dérivent d'un potentiel V, comme c'est le cas dans notre problème et multiplions la formule générale (6) par $\frac{dr}{ds}$, direction de la vitesse v. Le terme $v \times W$ s'annule, comme triple produit contenant deux vecteurs parallèles, et l'on obtient l'expression suivante, indépendante du tourbillon,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dr}{ds}\frac{dp}{dr} = \frac{dr}{ds}\frac{dV}{dr} - \frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dv^2}{dr} - \frac{dr}{ds}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Cette expression donne les dérivées par rapport à s et elle peut

s'écrire v_0 représentant la longueur du vecteur v

$$(13)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \frac{dV}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{v_0\partial t}, \qquad \frac{dr}{ds} = \frac{v}{v_0}.$$

Si le régime est permanent le dernier terme est nul, il reste

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} - \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = 0.$$

Dans une masse hétérogène, comme celle que nous considérerons ici, les trajectoires sont sur les surfaces d'égale densité. La densité ρ est constante le long de la trajectoire. On peut intégrer l'équation ci-dessus, qui donne, *le long d'une trajectoire*,

$$(15)\qquad \frac{1}{2}v^2 - V + \frac{p}{\rho} = \text{const.}, \qquad V - \frac{p}{\rho} = Q.$$

Dans ce cas, il y a de plus une fonction des pressions P ou U. La pression reste également constante sur les surfaces d'égale densité, et l'on a tout le long d'une trajectoire

$$(16)\qquad \frac{1}{2}v^2 - V = \text{const.}$$

C'est l'équation de Bernouilli simplifiée, dans notre cas, où la fonction Q (15) se réduit à V.

43. **Les vitesses des molécules sont constantes tout le long des trajectoires.** — Dans le cas d'une fonction des accélérations Q, et dans le cas où la force dérive d'un potentiel V, cas du problème étudié, la formule (6) peut s'écrire $\frac{\partial v}{\partial t}$ étant nul dans le mouvement permanent

$$(17)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} + \frac{dQ}{dr} = \frac{dV}{dr} - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} + 2v \times W.$$

Le premier membre dérive d'une fonction U.

1° Supposons d'abord que le tourbillon des vitesses W soit nul, tous les termes sont des gradients, ou dérivées par rapport à r. En intégrant, on obtiendra

$$(18)\qquad U = V - \frac{1}{2}v^2, \qquad \frac{1}{2}v^2 - V = U.$$

Les trajectoires sont toutes sur les surfaces d'égale densité, qui coïncident, dans le cas d'une fonction Q, avec les surfaces d'égale pression, ou surface de niveau U. Sur ces surfaces, U est constant, et la condition (16) de Bernouilli y est vérifiée partout. Les trajectoires restent indéterminées. Il faut et il suffit que les autres conditions le soient aussi.

Or il ne peut y avoir qu'une trajectoire, qu'un filet fluide, qui passe en chaque point, car il n'y a qu'une vitesse en un même point. En chaque point l'accélération de la vitesse est la résultante de la poussée de la pression et du gradient des forces. Il suffira de vérifier la direction, où cette résultante donne la variation de vitesse voulue pour déterminer la direction de la trajectoire.

Considérons l'intersection d'une surface, d'égale densité, avec une surface équipotentielle V. Le gradient du potentiel $\frac{dV}{dr}$ est normal à la surface V constant, et à cette intersection. Le gradient de la pression $\frac{dp}{dr}$ est normal à la surface d'égale densité, donc aussi à cette intersection. La vitesse doit rester constante en grandeur le long de cette intersection, v^2 constant. C'est précisément ce que donne la formule de Bernouilli (16) pour une trajectoire, qui resterait sur une surface V constant.

Les intersections des surfaces équipotentielles et des surfaces d'égale densité définissent donc les trajectoires. De plus les vitesses sont constantes tout le long de ces trajectoires.

2° Supposons en second lieu que le tourbillon W ne soit pas nul. Alors $2v \times W$ doit dériver d'une fonction H(7), comme on le voit directement. En intégrant on aura

$$(19) \qquad U = V - \frac{1}{2} v^2 + H, \qquad \frac{1}{2} v^2 - V = H - U.$$

L'intersection des surfaces H constant et U constant vérifie la condition (16) de Bernouilli et définit les trajectoires.

D'autre part considérons, comme ci-dessus, l'intersection des surfaces équipotentielles V avec les surfaces d'égale densité. Si cette intersection est une trajectoire, le vecteur $v \times W$, normal à r, est normal à l'intersection. D'après le même raisonnement que ci-dessus, v^2 doit y rester constant. Or v^2 constant, sur une surface V constant, vérifie l'équation (16) des trajectoires.

Les intersections des surfaces équipotentielles et des surfaces H avec les surfaces d'égale densité se confondent, et définissent les trajectoires. Les vitesses sont encore constantes sur ces trajectoires.

3° Supposons enfin qu'il n'y ait pas de fonction des accélérations Q. Nous voyons de la même façon que les intersections des surfaces équipotentielles V et des surfaces d'égale pression p vérifient les conditions des trajectoires. En effet les forces agissantes $\frac{dV}{dr}$ et $\frac{dp}{dr}$, normales à ces deux surfaces sont normales à leur intersection, le terme $v \times W$ est toujours normal aux trajectoires. Le v^2 doit rester constant d'après (17). Ceci vérifie bien la condition (16) de Bernouilli, la trajectoire étant sur une surface V constant.

Comme ces trajectoires doivent être sur les surfaces d'égale densité, il s'ensuit également que l'intersection des surfaces V et p se trouve sur une couche d'égale densité ρ. Les trois familles de surfaces V, p, ρ se coupent suivant les mêmes intersections.

44. Les surfaces d'égale vitesse sont toutes cylindriques par rapport à une même direction, s'il y a une fonction des accélérations. — La vitesse v étant la même tout le long d'une trajectoire, la section d'un filet fluide devra être partout la même. Or ces filets fluides sont constitués, dans le cas général, par les intersections des surfaces p et $p + dp$, d'égale pression, avec les surfaces V et V + dV. Les sections normales de ces intersections doivent être partout égales. Les surfaces V découperont dans les surfaces d'égales pression des tranches régulières et accolées qui constitueront les trajectoires élémentaires.

On peut évaluer la section de ces filets fluides, en fonction des éléments dynamiques. En effet désignons par dn la distance normale en un point de deux couches d'égale pression p et $p + dp$, qui coïncident ou non avec les couches d'égale densité. Désignons par dn' la distance, au même point, des couches V et V + dV, et par θ l'angle des deux normales. Soit dS la surface élémentaire de la section considérée, on a

$$(20) \qquad dS = \frac{dn\,dn'}{\sin\theta}, \qquad \left|\frac{dp}{dr} \times \frac{dV}{dr}\right| = \frac{dp}{dn}\,\frac{dV}{dn'}\sin\theta = \frac{dp\,dV}{dS}.$$

Les éléments différentiels dp, dV, dS doivent être constants le long des trajectoires.

La seconde expression montre que la valeur absolue du produit vectoriel du gradient de la pression, ou $\frac{dp}{dr}$, normal à la surface de pression constante, et du gradient $\frac{dV}{dr}$, est aussi constant tout le long de la trajectoire. La direction de ce vecteur serait d'ailleurs celle de la vitesse, qui est normale à la fois à ces deux vecteurs.

Désignons par R le rayon vecteur du rayon de courbure de la trajectoire, en un point quelconque M, et dirigé du centre de courbure C au point M. Il se trouve dans le plan osculateur de la trajectoire et l'accélération est égale à $\frac{v^2}{R}$, l'accélération tangentielle étant nulle. On a

$$\frac{dV}{dr} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dQ}{dr} = \frac{v^2}{R} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \tag{21}$$

L'accélération $\frac{v^2}{R}$, étant égale à un gradient $\frac{dQ}{dr}$, son rotationnel est nul, et ceci indique immédiatement que la grandeur du vecteur $\frac{v^2}{R}$ ne varie pas quand on se déplace normalement à R. Or, la grandeur de v^2 ne varie pas non plus dans la même direction, comme on l'a vu.

On en déduit immédiatement que les surfaces v^2 constant, ou des vitesses constantes, sont des surfaces cylindriques, dont les sections droites sont les trajectoires, celles-ci sont par conséquent des cercles de même rayon R, centrées sur l'axe du cylindre, quand il y a une fonction des accélérations.

Remarque. — Ceci ne serait plus vrai s'il n'y avait *pas de fonction* Q. Mais alors, dans (21), le premier membre serait toujours égal à $\frac{v^2}{R}$. Multiplions successivement (21) vectoriellement par $\frac{dp}{dr}$ et $\frac{dV}{dr}$, les termes contenant deux fois le même vecteur sont nuls. Il reste

$$\frac{v^2}{R} \times \frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dp}{dr}, \qquad \frac{v^2}{R} \times \frac{dV}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \times \frac{dV}{dr}. \tag{22}$$

Le premier membre représente la projection de $\frac{v^2}{R}$ sur les

surfaces p constants et sur les surfaces V constants. Les seconds membres indiquent, d'après (20), que ces projections sont constantes tout le long d'une trajectoire, le rapport des deux valeurs étant ρ, v^2 étant constant, R doit l'être également. Les trajectoires sont encore *circulaires*.

45. Les surfaces sont toutes de révolution et symétriques par rapport au plan équatorial moyen. — Les trajectoires sont donc toutes circulaires et constituées par l'intersection des surfaces de niveau p et des surfaces équipotentielles V. On en conclut que les intersections des trois familles p, V et ρ sont toujours circulaires. Elles sont donc toutes trois de révolution.

Considérons alors un filet fluide constitué par l'intersection des surfaces p et $p + dp$ et des surfaces V et $V + dV$. La vitesse v^2 constante est définie par l'équation de Bernouilli (16) et la section dS du filet fluide, qui est constante est définie par (20), son rayon R par (21). Ces surfaces étant fermées se coupent une seconde fois, de l'autre côté du plan équatorial, et les mêmes formules donneront le même v^2, le même dS et par conséquent le même rayon R. Nous en concluerons alors, comme pour l'équilibre relatif, n° 32, que toutes ces sections et par conséquent toutes ces surfaces sont symétriques, par rapport au plan moyen équatorial.

Remarque. — M. Dive dans sa Thèse, 1930, n° 1, démontre que les surfaces sont de révolution, en supposant d'avance, dans sa démonstration, que les composantes de la vitesse de chaque molécule sont $-\omega y$, ωx, 0, c'est-à-dire que ces molécules décrivent toutes des trajectoires circulaires, centrées sur le même axe. C'est admettre d'avance ce qu'il faut démontrer, et ce qui l'a été au n° 44. La démonstration de M. Dive serait valable seulement pour le cas de l'équilibre relatif. Mais alors appliquée à une masse homogène elle démontrerait, qu'il ne peut pas y avoir d'ellipsoïdes à trois axes, ou d'ellipsoïdes de Jacobi comme figures d'équilibre.

46. Équation réduite dans le mouvement permanent. — Dans le seul mouvement permanent possible, que nous venons de définir, les mouvements étant tous circulaires autour d'un même axe, l'accélération se réduit en chaque point à une accélération centrifuge $w \times (w \times r)$, où le vecteur vitesse de rotation est porté par

le même axe, et aura une valeur ω variable avec chaque point. En désignant par u le rayon vecteur d'un point, compté à partir de l'axe de rotation, la formule fondamentale de l'équilibre hydrodynamique, dans le cas du mouvement permanent, pourra s'écrire, d'une façon réduite, sous la même forme que pour l'équilibre relatif, n° 30,

$$(23) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} - w \times (w \times r), \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{dV}{dr} + \omega^2 u.$$

La vitesse de rotation ω, au lieu d'être constante, sera variable en chaque point.

On aura encore les trois équations algébriques

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

47. **Équation de Poincaré, équation de Bruns dans le mouvement permanent.** — Le premier terme de (23) est la pesanteur g. En prenant la divergence de ce vecteur, ou sa dérivée par rapport au rayon vecteur r, on obtient une formule analogue à celle du n° 33 pour le mouvement relatif

$$(25) \qquad g = \frac{dV}{du} + \omega^2 u, \qquad \frac{dg}{dr} = -4\pi f\rho + 2\omega^2 + u\frac{d\omega^2}{du}.$$

Comme ω^2 dépend de la position du point, on aurait, dans le dernier terme, à prendre $u\dfrac{d\omega^2}{dr}$, dérivée $\dfrac{d\omega^2}{dr}$ dans la direction u, qui se ramène à $u\dfrac{d\omega^2}{du}$.

Dans la formule de Bruns, il suffira d'ajouter ce dernier terme, pour obtenir son expression dans le cas du mouvement permanent, *voir* n° 34, formule (20)

$$(26) \qquad \frac{dg}{dn} = 2\frac{g}{R} + 2\omega^2 - 4\pi f\rho + u\frac{d\omega^2}{du}.$$

48. **Cas d'une fonction des accélérations. Les vitesses de rotation ne dépendent que de la distance à l'axe de rotation.** — Si l'accélération $\omega^2 u$ dépend d'une fonction Q, il en est de même des pressions ou du premier membre de (23). On peut intégrer et

écrire pour l'équation des surfaces de niveau,

$$U = V + Q. \tag{27}$$

C'est la même formule que pour l'équilibre relatif. Dans ce cas, comme dans le cas de l'équilibre relatif, les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité, qui sont données aussi par U constant.

Réciproquement, si les surfaces d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale densité, il y a une fonction U, et par conséquent une fonction Q, et les accélérations dérivent de cette fonction.

Si l'accélération $\omega^2 u$ dérive d'une fonction, son rotationnel doit être nul. Soit ξ, η, ζ les directions des trois axes de coordonnées, l'axe des z étant l'axe de rotation, on aura

$$u = \xi x + \eta y, \qquad \omega^2 u = \xi\omega^2 x + \eta\omega^2 y. \tag{28}$$

La composante suivant Oz est nulle. Le rotationnel de $\omega^2 u$ est un vecteur, qui se réduit à

$$\frac{d\times(\omega^2 u)}{dr} = -\xi\frac{\partial\omega^2 y}{\partial z} + \eta\frac{\partial\omega^2 x}{\partial z} + \zeta\left(\frac{\partial\omega^2 y}{\partial x} - \frac{\partial\omega^2 x}{\partial y}\right).$$

Chacune des composantes devant être nulle, on aura

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0, \qquad y\frac{\partial\omega^2}{\partial x} - x\frac{\partial\omega^2}{\partial y} = 0. \tag{29}$$

La première équation (29) est fondamentale ([1]). Elle exprime que dans le mouvement permanent, s'il y a une fonction des accélérations, la vitesse de rotation ne varie pas sur une parallèle à l'axe de rotation. Les surfaces d'égale vitesse doivent donc être cylindriques, comme on l'a démontré directement (n° 44).

La vitesse de rotation est donc fonction uniquement de u, distance à l'axe de rotation.

La seconde formule (29) exprime que la vitesse ω^2 reste constante sur le cercle de rayon $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Il est dès lors facile de déterminer cette fonction des accélérations, quand elle existe. Appelons ϖ la *vitesse de rotation moyenne*

([1]) ALEX. VÉRONNET, *Sur la rotation d'une masse hétérogène* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, 22 nov. 1926, p. 949).

définie par la formule suivante. L'équation (27) pourra s'écrire

$$(30)\qquad \varpi^2 = \frac{2}{u^2}\int_0^u \omega^2 u\,du, \qquad U = V + \frac{1}{2}\varpi^2 u^2.$$

En effet ϖ^2 ne dépend que de u, comme ω^2. Son gradient, dérivé par rapport au rayon vecteur r, sera égal à la dérivée par rapport à u, on aura

$$(31)\qquad \frac{d(\varpi^2 u^2)}{dr} = \frac{d(\varpi^2 u^2)}{du} = 2\,d\int_0^u \omega^2 u\,du = 2\omega^2 u.$$

On retrouvera bien l'équation fondamentale (23.2).

49. **Cas où il n'y a pas de fonction des accélérations.** — Dans le cas précédent le champ de forces des forces réelles et des forces d'inertie, ou le champ de la pesanteur g était irrotationnel. Il devient alors rotationnel, ou tourbillonnaire, et les surfaces de niveau, ou d'égale pression ne peuvent coïncider avec les surfaces d'égale densité.

Multiplions l'équation fondamentale (23.2) par dr, en remarquant que $u\,dr = u\,du$,

$$(32)\qquad dV = \frac{1}{\rho}dp - \omega^2 u\,du = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial u}du - \omega^2 u\,du.$$

On aurait la même expression en prenant la section méridienne et faisant $u = n$. dV étant une différentielle exacte, il doit en être de même du second membre. On doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial u} - \omega^2 u\right).$$

S'il y avait une fonction des pressions, on retrouverait $\dfrac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$, la condition pour qu'il y ait aussi une fonction des accélérations. Dans le cas général, on aura, en effectuant les opérations indiquées,

$$(33)\qquad u\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

Or le second membre n'est pas autre chose que le produit vectoriel du gradient des pressions $\dfrac{dp}{dr}$ et du gradient des densités $\dfrac{d\rho}{dr}$.

Or les gradients sont perpendiculaires aux deux surfaces, et leur produit vectoriel définit le sinus de l'angle des deux normales. On a

$$(34) \qquad \rho^2 u \frac{\partial \omega^2}{\partial z} = \frac{dp}{dr} \times \frac{d\rho}{dr} = \frac{dp}{dn} \frac{d\rho}{dn} \sin\theta = \rho\, g \frac{d\rho}{dn} \sin\theta.$$

La surface de niveau et les surfaces d'égale densité se coupent donc sous un angle d'autant plus grand, que l'on est plus loin de la loi $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$, qui définit la coïncidence des deux familles de surface, $\sin\theta = 0$.

On peut voir ce qui se passera à la surface des astres, où cette coïncidence des deux familles de surfaces n'est pas réalisée. La surface extérieure visible sera toujours une surface de niveau, ou d'égale pression. Alors les surfaces d'égale densité n'affleureront pas au même endroit et couperont la surface intérieure suivant des cercles parallèles, où les vitesses seront différentes. On aura des apparences différentes sur ces différents parallèles, d'où l'apparence des bandes parallèles sur Jupiter et Saturne. Les vitesses différentes sur des parallèles voisins détermineront, par le frottement, des tourbillons, qui produiront des taches, comme sur le Soleil, par la chute des gaz plus froids de l'atmosphère, dans l'entonnoir ainsi ouvert.

Remarque. — L'expression (32) pourrait encore s'écrire

$$dp = \rho\, dV + \rho \omega^2 u\, du = \rho \frac{\partial V}{\partial z} dz + \rho \frac{\partial V}{\partial u} du + \rho \omega^2 u\, du.$$

La condition pour que le second membre soit une différentielle exacte donnera

$$(35) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial u} + \rho\omega^2 u\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial z}\right), \qquad u \frac{\partial \rho\omega^2}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial u},$$

on peut intégrer le long d'une parallèle à l'axe Oz, où u est constant. On obtiendra l'expression de ω^2 en fonction des gradients de la densité ρ et du potentiel V.

CHAPITRE V.

MOUVEMENT PERMANENT RELATIF.

---

50. **Définition du problème. Résultats.** — Dans le régime permanent les couches d'égale densité conservent la même forme et la même position. Il y a invariabilité géométrique de la masse, comme dans un corps solide. On aura donc les mêmes axes et les mêmes moments d'inertie, le même ellipsoïde d'inertie. Nous pouvons supposer, comme pour un corps solide, que toute la masse tourne autour d'un axe. Nous pouvons définir alors le mouvement par rapport à des axes mobiles liés invariablement à la figure.

S'il n'y a pas de forces extérieures, l'énergie cinétique totale T reste constante, et le moment cinétique H est un vecteur constant en grandeur et en direction, qui définit un plan invariable. Nous avons les conditions d'un mouvement à la Poinsot, autour du centre de gravité.

Nous allons voir qu'il en est bien ainsi et que le mouvement est régi par des équations analogues à celles d'Euler, comme pour l'équilibre relatif hydrostatique.

Ce nouveau cas de mouvement tout à fait général pourra s'appeler mouvement permanent relatif. Comme dans l'équilibre relatif, la forme extérieure reste invariable et est entraînée par les axes mobiles avec la même vitesse de translation et de rotation. Mais les molécules internes, au lieu d'être immobiles, par rapport aux axes entraînés auront un mouvement permanent quelconque, par rapport à ces axes.

Nous verrons que le mouvement à la Poinsot est encore impossible, comme pour le cas de l'équilibre relatif et que ce cas se confond avec le mouvement permanent du chapitre précédent.

51. **Équations d'Euler généralisées.** — D'après le théorème des

moments, la dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale au moment des forces appliquées.

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\Sigma mr \times v = \Sigma r \times F, \qquad \frac{dH}{dt} = M_0,$$

$M_0(L, M, N)$ étant le moment des forces par rapport à l'origine O. Si l'on considère un système entraîné avec une vitesse de rotation $w(p, q, s)$, la vitesse relative de H dans ce système étant $\frac{\partial H}{\partial t}$, on a

$$(2)\qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + w \times H.$$

Considérons un corps solide et prenons ses axes principaux pour axes du système mobile, et le centre de gravité pour origine, son accélération étant nulle. On aura

$$(3)\qquad H = \xi A p + \eta B q + \zeta C s.$$

ξ, η, ζ sont les trois directions des axes. Portons cette expression dans (1) et (2), nous aurons une équation vectorielle, dont les trois composantes donneront les trois équations d'Euler. Si le moment des forces par rapport au centre de gravité est nul $M_0 = 0$, les seconds membres sont nuls. Le vecteur H des moments cinétiques est constant, en grandeur et en direction, son carré, qui définit sa grandeur, sera

$$(4)\qquad H^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 s^2.$$

Considérons notre masse fluide en mouvement permanent et tournant en outre avec une vitesse instantanée $w(p, q, s)$ avec le système mobile. Calculons son moment H. Il faut remplacer dans (1) la vitesse v par la vitesse absolue v_a. Désignons par v la vitesse relative, on aura

$$(5)\qquad v_a = w \times r + \frac{\partial r}{\partial t} = w \times r + v,$$

$$(6)\qquad H = \Sigma mr \times v_a = \Sigma mr \times (w \times r) + \Sigma mr \times v = H_e + H_r.$$

Ce moment cinétique se compose de deux termes, l'un le moment d'entraînement H_e, dû à la vitesse de rotation w, qui donne à chaque point une vitesse $w \times r$, et l'autre le moment relatif H_r dû aux vitesses relatives v. Ce dernier est un vecteur

constant en direction et grandeur, par rapport au système mobile et entraîné avec lui, puisqu'il y a régime permanent et que les vitesses relatives sont constantes en chaque point.

Désignons les composantes de H_r par H_1, H_2, H_3 dans le système mobile. Celles de H_e sont données, par (3). On a

$$H = H_e + H_r = \xi(Ap + H_1) + \eta(Bq + H_2) + \zeta(Cs + H_3),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_e}{\partial t} = \xi A p' + \eta B q' + \zeta C s', \qquad \frac{\partial H_r}{\partial t} = 0.$$

Portons ces expressions dans les équations (1) et (2) on obtient les équations d'Euler généralisées,

$$(8) \qquad \begin{cases} Ap' + (C - B)qs + (H_3 q - H_2 s) = L, \\ Bq' + (A - C)sp + (H_1 s - H_3 p) = M, \\ Cs' + (B - A)pq + (H_2 p - H_1 q) = N. \end{cases}$$

Si le moment relatif $H_r(H_1, H_2, H_3)$ est nul, on retrouve les équations d'Euler ordinaires.

Ici les forces agissantes sur les particules sont des forces intérieures, dont la résultante et le moment M_0 sont nuls. Les seconds membres sont nuls. Multiplions alors sucessivement les équations (8) par p, q, s et ajoutons-les, il reste

$$(9) \qquad App' + Bqq' + Css' = 0 \qquad H_e \varpi' = 0,$$

cette expression est aussi le produit algébrique des deux vecteurs H_e et ϖ'. Elle est encore la dérivée de la force vive d'entraînement

$$(10) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cs^2 = H_e \varpi = 2T_e = h,$$

cette quantité reste constante, comme pour un corps solide dans le mouvement à la Poinsot.

52. **La quantité de mouvement relatif est nulle.** — La somme des quantités de mouvement total est, d'après l'expression de la vitesse absolue (5)

$$(11) \qquad Q = \Sigma m v_a = \Sigma m \varpi \times r + \Sigma m v = Q_e + Q_r.$$

Le centre de gravité étant pris pour origine, et la vitesse de rotation ϖ étant la même au même instant pour tous les points,

on a

$$\Sigma m r = 0; \qquad Q_e = \Sigma m \varpi \times r = 0.$$

Pour que le centre de gravité reste immobile, il faut et il suffit que la quantité de mouvement totale soit nulle, donc que la quantité de mouvement relatif le soit

$$(12) \qquad Q_r = \Sigma m v = 0.$$

53. Énergie cinétique relative. — L'énergie cinétique totale T s'écrira de même

$$(13) \qquad 2\mathrm{T} = \Sigma m\, v_a^2 = \Sigma m[(\varpi \times r)^2 + 2(\varpi \times r)v + v^2].$$

En désignant par T_r l'énergie cinétique relative, due uniquement aux vitesses relatives, troisième terme de cette expression, et en tenant compte des valeurs H(6), on peut écrire

$$(14) \qquad 2\mathrm{T} = \varpi \mathrm{H}_e + 2\varpi \mathrm{H}_r + 2\mathrm{T}_r.$$

$\varpi \mathrm{H}_e$ et $\varpi \mathrm{H}_r$ étant des produits algébriques des deux vecteurs.

L'énergie relative T_r est constante, puisque le régime est permanent. S'il n'y a pas de forces extérieures appliquées, l'énergie cinétique totale T est également constante. On a

$$(15) \qquad \varpi(\mathrm{H}_e + 2\mathrm{H}_r) = \varpi(\mathrm{H} + \mathrm{H}_r) = 2(\mathrm{T} - \mathrm{T}_r) = \text{const}.$$

L'expression 2T(13) est un nombre algébrique, ou invariant algébrique. On peut le considérer comme exprimé dans n'importe quel système d'axes. Prenons le dans le système mobile. Les quantités r et v sont invariantes, ϖ seul varie avec le temps. La dérivée de T par rapport au temps est nulle, et (13) donne

$$(16) \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \varpi' \Sigma m[r \times (\varpi \times r) + r \times v] = \varpi' \Sigma m r \times v_a = \varpi' \mathrm{H} = 0,$$

car

$$(\varpi' \times r)v = \varpi'(r \times v) \qquad \text{et} \qquad 2(\varpi' \times r)(\varpi \times r) = 2\varpi'[r \times (\varpi \times r)].$$

L'expression $\varpi' \mathrm{H} = 0$ nous indique, comme dans le mouvement à la Poinsot, que la variation ϖ' de la vitesse de rotation est toujours normale au vecteur constant H, et reste dans le plan invariable sur lequel roule l'ellipsoïde d'inertie. Elle définit ce plan invariable.

54. **Force vive d'entraînement. Première relation.** — Le moment cinétique total H est constant. Sa dérivée totale par rapport au temps est nulle. Dans le système mobile, elle est égale à sa dérivée relative $\frac{\partial H}{\partial t}$, ou vitesse de l'extrémité du vecteur H dans le système mobile, plus la vitesse d'entraînement de cette extrémité, d'où on a

$$(17) \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + w \times H = \frac{\partial H_e}{\partial t} + w \times H = 0.$$

En multipliant algébriquement par le vecteur w on a

$$(18) \qquad w\frac{\partial H_e}{\partial t} = 0 \qquad \text{car} \quad w(w \times H) = 0, \qquad \frac{\partial H_r}{\partial t} = 0,$$

H_e moment cinétique d'entraînement est le même que celui du corps solide correspondant, formule (6) dans le système mobile. L'expression (18) peut s'écrire, d'après les règles d'interversion des produits algébriques et des produits vectoriels de vecteurs,

$$(19) \qquad w\Sigma m[r \times (w' \times r)] = \Sigma m(w' \times r)(w \times r) = w'\Sigma m[r \times (w \times r)],$$

$$(20) \qquad w\frac{\partial H_e}{\partial t} = w' H_e = App' + Bqq' + Css' = 0.$$

C'est l'expression (9), tirée déjà des équations d'Euler généralisées. Elle indique que w' est toujours normale à H_e, comme à H. C'est aussi l'expression dérivée de

$$(21) \qquad 2T_e = wH_e = Ap^2 + Bq^2 + Cs^2 = \text{const}.$$

qui est la force vive d'entraînement d'après (10). La constance de la force vive d'entraînement nous donne donc la première relation (20) du mouvement à la Poinsot.

55. — **Le moment cinétique relatif est nul dans le mouvement à la Poinsot.** — Portons cette valeur $w'H_e = 0$ dans l'expression $w'H = 0$ (16), il vient

$$(22) \qquad w'H = w'(H_e + H_r) = w'H_r = 0.$$

Cette expression montre que le moment cinétique relatif H_r devrait rester toujours normal à w'. Or c'est impossible. Car H_r est un vecteur constant, lié à la masse, qui tourne comme un corps

solide, par hypothèse. Ce mouvement est produit par le roulement de l'ellipsoïde d'inertie sur le plan invariable, qui contient constamment ω'. Aucune droite liée à l'ellipsoïde ne peut rester normale à ω'. Il faut donc que l'on ait dans (22)

$$H_r = 0 \quad \text{ou} \quad \omega' = 0.$$

Le mouvement à la Poinsot ne peut avoir lieu, $\omega' \neq 0$, que si le moment cinétique relatif est nul

Si $\omega' = 0$ la rotation a lieu autour d'un axe principal, qui reste parallèle au vecteur constant H. Alors seulement le moment relatif H_r peut ne pas être nul. Il est parallèle à l'axe de rotation ω et à H. Nous verrons qu'il en est bien ainsi dans le seul cas de mouvement possible.

Autre démonstration. — Le mouvement est donc défini par les relations (16) et (20) $\omega' H = 0$ et $\omega' H_e = 0$ tirées de la constance des forces vives et de la constance du moment cinétique H. La première nous indique que, dans le mouvement du fluide, la variation ω' de la vitesse de rotation reste constamment normale au vecteur fixe du moment cinétique total H, c'est-à-dire reste dans le plan invariable. La seconde nous indique que ω' reste aussi constamment normal à H_e, moment cinétique d'entraînement, ou moment cinétique du solide équivalent. Or ce moment du solide reste constant et fixe dans le mouvement à la Poinsot. Il en est de même de H_e, qui doit donc être parallèle à H. Le mouvement d'ensemble de la masse fluide se ramène à celui du solide correspondant.

La relation $H = H_e + H_r$ nous montre immédiatement que H_r doit être nul, ou restera parallèle à H et à H_e. Ce dernier cas correspond au cas particulier envisagé ci-dessus.

Remarque. — L'équation (14) avec $H_r = 0$ se réduit à

$$2T = \omega H_e + 2T_r, \qquad T = T_e + T_r.$$

L'énergie cinétique totale est bien égale à l'énergie cinétique d'entraînement, augmentée de l'énergie cinétique relative.

56. **Moment cinétique total constant. Deuxième relation.** — Le moment cinétique total H, dans le mouvement général, devra donc

se réduire au moment d'entraînement H_e, qui est le même que celui du corps solide, formules (3) et (4). On peut écrire

$$(23)\qquad H^2 = H_e^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 s^2 = \text{const.}$$

La dérivation par rapport au temps, nous donne

$$(24)\qquad H_e \frac{dH_e}{dt} = H_e \frac{\partial H_e}{\partial t} = A^2 pp' + B^2 qq' + C^2 ss' = 0,$$

A, B, C étant les moments d'inertie de la masse par rapport au système mobile et p, q, s les composantes de la vitesse de rotation ϖ, dans le même système.

Nous retrouvons la seconde des relations qui définissent le mouvement du corps solide à la Poinsot, autour d'un point fixe. Elle correspond à la constance du moment cinétique, comme la première (20) correspondait à la constance des forces vives.

Nous avons donc ici les mêmes relations que pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

57. **L'équation de condition du mouvement permanent relatif. Troisième relation.** — Dans le cas précédemment étudié, équilibre relatif (Chap. III), on avait ajouté, à l'accélération des forces réelles F, l'accélération d'entraînement, changée de signe, x'', y'', z'', ou $\varpi' \times r + \varpi \times (\varpi \times r)$, n° 27, formule (2). Ici il faut ajouter encore l'accélération relative $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ et l'accélération de Coriolis $2\varpi \times v$, où v est la vitesse relative, par rapport aux axes mobiles, et qui n'est plus nulle dans notre cas.

L'équation générale d'hydrodynamique s'écrira

$$(25)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = F - \varpi' \times r - W, \qquad W = \varpi \times (\varpi \times r) + 2\varpi \times v + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Dans le cas général où ρ n'est pas constant et où il n'y a pas de fonction des pressions P, la force totale écrite au second membre doit être, en chaque point et à chaque instant, normal à son rotationnel. Le rotationnel de $\varpi' \times r$ est $2\varpi'$ (n° 28). On a la condition

$$(26)\qquad (F - \varpi' \times r - W)\left(\frac{\partial \times F}{\partial r} - 2\varpi' - \frac{\partial \times W}{\partial r}\right) = 0.$$

En effectuant et remarquant que $(\varpi' \times r)\varpi' = 0$, et mettant ϖ'

en facteur, on pourra écrire, comme au n° 37,

$$(27)\qquad \omega'\left(2F - 2W + r\frac{\partial \times F}{\partial r} - r \times \frac{\partial \times W}{\partial r}\right) = (F - W)\left(\frac{\partial \times F}{\partial r} - \frac{\partial \times W}{\partial r}\right).$$

Ce qu'on peut écrire algébriquement

$$(28)\qquad Pp + Qq' + Rs' = S,$$

où P, Q, R sont les composantes du vecteur compris dans la première parenthèse et S la valeur du second membre. C'est une équation identique à (30) du premier cas (n° 37).

58. **Le mouvement à la Poinsot est impossible pour une masse fluide en mouvement permanent relatif.** — Les deux premières relations qui définissent le mouvement du fluide dans le cas du mouvement permanent (20) et (24) sont les mêmes que celles que nous avons rencontrées dans le cas du mouvement relatif (31) (n° 37). L'équation de condition (28) a exactement la même forme que celle de l'équilibre relatif dans le cas le plus général (30). La valeur des coefficients P, Q, R, S est seulement différente, car ils contiennent ici l'expression des vitesses relatives et des accélérations relatives. En tout cas ces coefficients sont, comme dans le premier cas de l'équilibre relatif, fonctions de la position du point et du temps.

La démonstration sera exactement la même qu'au n° 37. Ces trois équations linéaires définissent d'une facon univoque la valeur de la variation de la vitesse de rotation $\omega'(p', q', s')$ en chaque point à chaque instant. La valeur des solutions doit être la même pour tous les points au même instant. Or cela ne peut avoir lieu que pour les points situés sur une surface, définie par les solutions du système. Le mouvement à la Poinsot, avec variation de la vitesse de rotation ω est impossible. Il faut ici $\omega' = 0$ comme dans l'équilibre relatif.

Comme au n° 37, l'équation (27) pourrait s'écrire

$$(27)'\qquad \omega' V = S, \qquad \omega' V_1 = S, \qquad \frac{S}{V_1} = \omega'.$$

ω' est constant pour tous les points, alors que $\frac{S}{V_1}$, fonction de points ne détermine qu'une surface. Il faut $\omega' = 0$.

59. La rotation doit se faire autour de l'axe de révolution. — Les équations d'Euler sont applicables dans leur forme ordinaire, puisque nous avons ici $H_r(H_1, H_2, H_3)$ nul. On démontre alors, comme pour l'équilibre relatif (n° 29), que deux des composantes p, q, s de la rotation ω doivent être nulles. La rotation se réduit à une seule composante suivant l'un des axes principaux d'inertie, qui sont pris comme axes du système mobile.

Pour la stabilité l'axe de rotation doit être le petit ou le grand axe, non l'axe moyen. Dans le cas d'une figure de révolution, comme c'est le cas également dans le mouvement permanent, l'axe de rotation doit coïncider avec l'axe de révolution, c'est-à-dire avec l'axe de rotation commun à toutes les molécules du mouvement permanent. Nous sommes ramenés au même mouvement que celui du Chapitre précédent.

60. Cas plus général du mouvement relatif non permanent. Les trois équations de mouvement à la Poinsot. — On peut supposer que le mouvement par rapport aux axes entraînés n'est pas permanent, à condition seulement de conserver l'invariance dans la forme géométrique des surfaces d'égale densité liées aux axes mobiles.

Dans notre masse isolée, la force vive totale et le moment cinétique total restent tous deux constants et nous obtiendrons comme ci-dessus les relations correspondant au mouvement.

Nous obtiendrons, comme au n° 51, les équations d'Euler généralisées, mais dans la formule (7) comme la vitesse relative v n'est plus constante, on ne pourra plus faire $\frac{\partial H_r}{\partial t} = 0$. Les équations (8) auront un terme de plus, correspondant à ce fait. On ne pourra plus en déduire (9) $\omega' H_e = 0$.

La quantité de mouvement relatif doit toujours rester nulle $\Sigma m v = 0$ (n° 52), malgré la variation des vitesses individuelles relatives v.

La dérivée de l'énergie cinétique T (13) doit porter également sur v, ce qui ajoute à la formule (16) les termes suivants que nous désignerons par S_1,

$$\Sigma m(\omega \times r)\frac{dv}{dt} + \Sigma m v \frac{dv}{dt} = \Sigma m v_a \frac{dv}{dt} = S_1.$$

L'équation (16) qui traduit la constance de la force vive devient

(29) $$w'H = S_1, \qquad w'(H_e + H_r) = S_1,$$

(30) $$(A_p + H_1)p' + (B_q + H_2)q' + (C_r + H_3)s' = S_1,$$

c'est la première relation (20) avec les termes H_1, H_2, H_3, S_1 en plus.

Le moment relatif H_r ne peut plus être nul ici, comme dans le mouvement permanent.

La constance du moment cinétique H nous donne ensuite la seconde relation, comme au n° 51, H^2 est un invariant. On a, d'après (7),

$$\frac{1}{2}\frac{dH^2}{dt} = H\frac{dH}{dt} = H\left(\frac{\partial H}{\partial t} + w \times H\right) = H\frac{\partial H}{\partial t} = H\left(\frac{\partial H_e}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial t}\right) = 0,$$

$$H\frac{\partial H_e}{\partial t} = -H\frac{\partial H_r}{\partial t}, \qquad (H_e + H_r)\frac{\partial H_e}{\partial t} = S_2.$$

Cette expression analogue à (24) s'écrira, en représentant par S_2 la valeur du second membre, indépendante de $w'(p', q', s')$,

(31) $$(Ap + H_1)Ap' + (Bq + H_2)Bq' + (Cs + H_3)Cs' = S_2.$$

Enfin l'équation de condition de l'équilibre hydrodynamique sera la même que celle du n° 57, formule (27) et (28), où la vitesse relative v et l'accélération relative $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$, contenues dans W, sont variables avec le temps t, au lieu d'être constantes, comme dans le mouvement permanent.

61. **Le seul mouvement possible se réduit encore à une simple rotation autour d'un axe principal fixe.** — Nous avons donc un système de trois équations linéaires, toutes trois avec second membre, pour déterminer $w'(p', q', s')$, les équations (30), (31), et (28), du cas précédent n° 57.

Les solutions seront données par les formules

(32) $$p' = \frac{D_1}{D}, \qquad q' = \frac{D_2}{D}, \qquad s' = \frac{D_3}{D},$$

où les D sont les déterminants formés au moyen des coefficients du système. Ils sont donc fonction de la position du point considéré et du temps. A chaque instant, il doivent donner pour p', q', s' des

valeurs qui sont les mêmes ponr tous les points, pour que la vitesse de rotation $\varpi(p, q, s,)$ reste également la même pour tous.

On a donc à chaque instant

$$D_1 = p'D, \qquad D_2 = q'D, \qquad D_3 = s'D. \tag{33}$$

Chacune de ces expressions représente donc une surface déformable. Les points de la masse fluide qui sont à l'instant t sur ces trois surfaces, à l'intervection de ces trois surfaces, conserveront seuls la même rotation d'ensemble

Le mouvement à la Poinsot est donc impossible pour cette masse fluide. Il faut faire $\varpi'(p', q', s') = 0$ dans nos équations, et par conséquent $S_1 = S_2 = 0$, et nous sommes ramenés au mouvement précédent, rotation simple autour d'un axe principal fixe avec mouvement permanent.

L'invariance géométrique des surfaces est impossible, s'il n'y a pas mouvement permanent, et cela dans le mouvement permanent relatif, comme dans le mouvement permanent simple, Chap. IV.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE GÉNÉRALE ET ÉVOLUTION DE LA FORME D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES FORMES ELLIPSOÏDALES.

62. **Le problème qui se pose et les résultats.** — Nous avons vu, lans le premier fascicule de cet ouvrage, Chapitre III l'étude omplète des formes successives, que pouvait prendre une *masse iomogène* en rotation ; variation de l'aplatissement et des autres léments avec la vitesse et avec la contraction. Nous avons vu que, lans le cas pratique de la contraction des astres, le moment de otation restant constant, l'ellipsoïde de révolution s'applatissait le plus en plus, avec une vitesse de rotation croissante, et tendait inalement vers la forme d'un disque aplati, dont on pouvait déterniner le rayon et la vitesse de rotation finale. A partir d'une ertaine vitesse, la masse pouvait prendre la forme d'un ellipsoïde trois axes, qui s'amincissait finalement en aiguille. Il se greffait nême d'autres figures d'équilibre de bifurcation sur ces figures llipsoïdales.

Le même problème se pose pour une *masse hétérogène* de echercher les formes qu'elle pourra prendre suivant la vitesse de otation, le degré de contraction, etc. Le problème se simplifie, arce que la masse hétérogène ne peut prendre que des formes qui ont de révolution. Nous verrons dans cette seconde Partie qu'on

peut le résoudre aussi complètement que pour la masse homogène, depuis les faibles vitesses et les faibles contractions, jusqu'aux limites extrêmes. Ce sera l'objet de cette deuxième Partie.

M. Hamy avait démontré, pour des couches discontinues, ce théorème fondamental, que dans l'équilibre relatif, les surfaces de niveau d'une masse hétérogène ne pouvaient pas être rigoureusement ellipsoïdales. Il a été étendu au mouvement permanent. Nous le démontrerons pour des couches ellipsoïdales continues quelconques. Nous y ajouterons différentes relations générales entre les vitesses et les aplatissements. Ces relations conservent leur valeur, car on démontrera dans le chapitre suivant que pratiquement les surfaces restent très voisines des ellipsoïdes. On a conservé dans ce chapitre la notation des ellipsoïdes à trois axes pour conserver toute la généralité des démonstrations, même dans le cas d'une déformation par l'action d'un autre astre.

63. **Rappel des formules de l'attraction d'un ellipsoïde homogène.** — Ces formules sont démontrées dans le Tome III du présent *Traité de Mécanique rationnelle*, Chap. XXIX, n° 602, *voir* également Tome IV, première Partie, n° 10.

Soit un ellipsoïde homogène de densité ρ, d'axes a, b, c. Le potentiel dû à la gravitation, en un *point extérieur* x, y, z, est

$$(1)\qquad V_e = \pi f abc\rho \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

On intègre par rapport à la variable λ de l'infini à u, cette valeur limite étant définie comme la racine unique de l'équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1.$$

V_e dépend donc des coordonnées x, y, z, du point de deux façons : directement sous le signe somme, et par la limite u.

Le potentiel sur un *point intérieur* V_i est donné par une formule analogue où u est remplacé par zéro.

$$(3)\qquad V_i = \pi f abc\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Les deux potentiels se raccordent pour les points situés sur la surface de l'ellipsoïde, où la fonction s'annule,

$$u = 0, \qquad V_e = V_i.$$

Les composantes X_e, Y_e, Z_e de l'attraction sur un point extérieur seront données par les dérivées partielles du potentiel

$$(4)\quad \frac{\partial V_e}{\partial x} = -2\pi f abc\rho x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \pi f abc\rho\left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Le dernier terme provient de ce que la limite u est fonction de x. Ce terme est nul d'après (2). Il vient

$$(5)\quad X_e = \frac{\partial V_e}{\partial x} = -P_e x, \qquad P_e = 2\pi f abc\rho \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Les composantes X_i, Y_i, Z_i sur un point intérieur seront de même forme, où u est remplacé par 0,

$$(6)\quad X_i = \frac{\partial V_i}{\partial x} = -P_i x, \qquad P_i = 2\pi f abc\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

On aura pour Y et Z les mêmes formules où a sera remplacé, sous le signe somme, par b et c.

64. Attraction d'une couche ellipsoïdale et d'un ellipsoïde hétérogène. — L'attraction d'une couche ellipsoïdale élémentaire, de densité constante ρ et comprise entre deux surfaces ellipsoïdales voisines d'axes a, b, c, et $a+da$, $b+db$, $c+dc$, sur un point x, y, z, sera donnée par

$$(7)\quad dX_e = -x\,dP_e = -2\pi f x\rho\, d\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda} = -2\pi f x\rho\, dA_u,$$

$$(8)\quad D_\lambda = \frac{1}{abc}\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

$$(9)\quad dX_i = -x\,dP_i = -2\pi f x\rho\, d\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda} = -2\pi f x\rho\, dA_0.$$

La dérivation porte ici sur les axes a, b, c.

Calculons pour un ellipsoïde hétérogène, composé de couches

ellipsoïdales élémentaires, l'attraction sur un point intérieur x, y, z, situé sur l'ellipsoïde d'axes α, β, γ,

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1. \tag{10}$$

L'attraction des couches intérieures à cet ellipsoïde, pour lesquelles le point est extérieur, sera

$$X_e = -2\pi f x \int_0^{\alpha} \rho\, dA_u = -2\pi f x \int_0^{\alpha} \rho\, d \int_u^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\,D_\lambda}. \tag{11}$$

La densité ρ est supposée exprimée en fonction de l'un des axes a par exemple et nous devons intégrer du centre, où $a = 0$, à la surface, où se trouve le point considéré, où $a = \alpha$.

L'attraction des couches extérieures à l'ellipsoïde α, β, γ, pour lesquelles le point est intérieur, s'obtiendra en intégrant de α à a_1, valeur de l'axe a à la surface.

$$X_i = -x\int_{\alpha}^{a_1} dP_i = -2\pi f x \int_{\alpha}^{a_1} \rho\, dA_0 = -2\pi f x \int_{\alpha}^{a_1} \rho\, d \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda}.$$

L'attraction totale de toute la masse sur le point considéré, de masse égale à l'unité, sera

$$X = X_e + X_i = -2\pi f x\left[\int_0^{\alpha} \rho\, dA_u + \int_{\alpha}^{a_1} \rho\, dA_0\right] \tag{12}$$

$$= -2\pi f x\left[\int_0^{\alpha} \rho\, d\int_u^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda} + \int_{\alpha}^{a_1} \rho\, d \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda}\right].$$

On aura pour Y et Z les mêmes formules, où a^2 sera remplacé par b^2 et par c^2.

65. **Méthode de M. Hamy et formules.** — Dans la méthode précédente, on considère des couches élémentaires enfermées l'une dans l'autre comme es feuilles du bulbe d'un oignon. M. Hamy considère l'ellipsoïde hétérogène comme formé d'ellipsoïdes concentriques, qui se compénètrent, en étant en retrait les uns par rapport aux autres et dont les densités s'ajoutent en chaque point. Cette méthode a l'avantage de ramener l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène à celle d'ellipsoïdes homogènes et de bénéficier de tous les calculs faits sur ceux-ci. De même les difficultés sur le

potentiel à la limite sont levées une fois pour toutes dans les ellipsoïdes homogènes.

Nous considérons d'abord l'ellipsoïde homogène limité par la surface extérieure, d'axes a_1, b_1, c_1, de densité ρ_1. Puis l'ellipsoïde limité par la surface de niveau immédiatement au dessous, de densité $\rho_1 - d\rho_1$ et d'axes $a_1 - da_1$, $b_1 - db_1$, $c_1 - dc_1$, auquel on donnera la densité $d\rho_1$. On continuera ainsi jusqu'au centre en considérant chaque fois l'ellipsoïde général d'axes a, b, c, de densité $d\rho$. On intégrera de la surface au centre pour que l'accroissement de densité $d\rho$ soit positif.

On aura pour l'attraction de l'ellipsoïde de surface

$$(13)\qquad X_1 = -x P_1 = -2\pi f x \rho_1 A_1, \qquad A_1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda) D_{1\lambda}}.$$

Pour l'attraction des ellipsoïdes extérieurs à l'ellipsoïde α, β, γ, sur lequel se trouve le point considéré x, y, z, qui leur est intérieur, on aura

$$(14)\qquad X_i = -x P_i = -2\pi f x \int_{a_1}^{\alpha} A_0\, d\rho = -2\pi f x \int_{a_1}^{\alpha} d\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D_\lambda}.$$

Enfin l'attraction des couches intérieures sera

$$X_e = -x P_e = -2\pi f x \int_\alpha^0 A_u\, d\rho = -2\pi f x \int_\alpha^0 d\rho \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D_\lambda}.$$

$D_{1\lambda}$ dans (13) est la valeur de D_λ où l'on a fait a, b, c, égaux à a_1, b_1, c_1 valeurs des axes à la surface.

L'attraction totale sur le point intérieur x, y, z sera

$$(15)\qquad X = X_1 + X_i + X_e = -x P = -2\pi f x\left(\rho_1 A_1 + \int_{a_1}^{\alpha} A_0\, d\rho + \int_\alpha^0 A_u\, d\rho\right).$$

La somme des trois termes de la parenthèse étant

$$\rho_1 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda) D_{1\lambda}} + \int_{a_1}^{\alpha} d\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D_\lambda} + \int_\alpha^0 d\rho \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D_\lambda}$$

on pourra écrire (15) sous la forme symbolique

$$(16)\qquad \frac{P}{2\pi f} = \int_\alpha \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D_\lambda}.$$

En remplaçant dans P les a par b et c, on obtiendra les expressions Q et R qui définiront Y et Z.

66. **Remarques sur les fonctions P, Q, R.** — Dans la formule (16), les éléments d'intégration des trois intégrales ayant la même forme, on peut symboliser l'intégration par un seul signe somme, avec l'indice α seul, comme on l'a écrit en dernier lieu.

Des trois termes que cette somme représente, le premier, l'élément superficiel en ρ_1, est une constante; le second, représentant les couches extérieures au point considéré, ne dépend que des éléments α, β, γ de la surface où se trouve ce point; enfin le troisième, relatif aux couches internes, dépend de la surface et de la position x, y, z du point sur la surface, par la limite u, d'après la formule (2).

Pour que P, Q, R conservent la même valeur sur toute la surface d'égale densité α, β, γ, c'est-à-dire pour que ces fonctions soient indépendantes de la position du point sur la surface, quelle que soit la surface, il faut et il suffit qu'elles soient indépendantes de u, ou que u ne dépende que de α, β, γ. Les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans (2) et (10) doivent être proportionnels. On doit avoir

$$\frac{\alpha^2}{a^2+u} = \frac{\beta^2}{b^2+u} = \frac{\gamma^2}{c^2+u} = \text{const.}$$

Il faut que les ellipsoïdes a, b, c soient homofocaux à l'ellipsoïde α, β, γ, c'est-à-dire que tous les ellipsoïdes soient homofocaux entre eux, puisque la surface α, β, γ est quelconque.

Pour que P, Q, R soient constants partout, il faut en outre qu'ils soient indépendants de α, β, γ. Il faut pour cela que la seconde et la troisième intégrale du second membre de (16) soient identiquement nulles, quel que soit α. L'élément d'intégration étant toujours positif, il faut que l'on ait $d\rho = 0$. La variation de densité d'une couche à l'autre doit être nulle. Il faut que la masse soit homogène.

P, Q, R dépendent donc en général de α, β, γ, axes de la couche considérée et de x, y, z coordonnées du point situé sur la couche. Or on peut toujours supposer que deux des axes sont exprimés en fonction de l'autre, β et γ par exemple en fonction de α, la loi de variation des applatissements étant supposée connue ou donnée.

De même la loi de variation des densités ρ est supposée connue et pourra s'exprimer également en fonction de α. La relation (10), qui définit les ellipsoïdes d'égale densité, détermine α en fonction de x, y, z, de sorte que P, Q, R sont simplement fonctions des trois coordonnées du point x, y, z, comme cela devait être.

67. **Passage d'une méthode à l'autre.** — On peut passer des formules (12) à celles de la méthode de M. Hamy (15) par une simple intégration par parties et réciproquement. Considérons les formules

$$(17) \quad \frac{X}{2\pi f x} = -\int_0^\alpha \rho\, dA_u - \int_\alpha^{a_1} \rho\, dA_0, \qquad A_u = \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D_\lambda}.$$

En intégrant par parties et renversant les limites pour conserver $d\rho$ positif, on a

$$\frac{X}{2\pi f x} = -|\rho A_u|_0^\alpha + \int_\alpha^0 A_u\, d\rho - |\rho A_0|_\alpha^{a_1} + \int_{a_1}^\alpha A_0\, d\rho.$$

$|\rho A_u|_0$ est nul, car, si l'on fait $a = 0$, on a $b = 0$, $c = 0$ et $\frac{1}{D_\lambda} = 0$; d'où $A_u = 0$. De plus les deux expressions intégrées sont égales pour la limite α, car alors $\alpha = a$ et l'on a $u = 0$ et $A_u = A_0$. Elles se détruisent. Il reste $|\rho A_0|\, a_1 = \rho_1 A_1$ et les deux intégrales. On obtient bien l'expression (15) ci-dessus.

68. **Formules générales au moyen du potentiel.** — Dans la méthode de M. Hamy nous avons à considérer d'abord le potentiel dû à l'ellipsoïde de surface

$$(18) \quad V_1 = \pi f \rho_1 \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_{1\lambda}}.$$

Puis le potentiel dû aux ellipsoïdes pour lesquels le point x, y, z, est intérieur, intégration de a_1 à α

$$(19) \quad V_i = \pi f \int_{a_1}^\alpha d\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

Enfin le potentiel dû aux ellipsoïdes pour lesquels le point est extérieur

$$V_e = \pi f \int_0^\alpha d\rho \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

Or V_1 est une constante qui peut rentrer dans V_i par le terme correspondant à la limite a_1. On peut faire aussi $a_1 = 1$. On aura pour le potentiel total

$$(20) \quad V = \pi f \int_1^\alpha d\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_\lambda}$$
$$+ \pi f \int_\alpha^0 d\rho \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

$$(21) \quad V = V_u - \frac{1}{2}(Px^2 + Qy^2 + Rz^2),$$

où V_u correspond au terme 1 de la parenthèse

$$(22) \quad V_u = \pi f \int_1^\alpha d\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D_\lambda} + \pi f \int_\alpha^0 d\rho \int_u^\infty \frac{d\lambda}{D_\lambda} = \pi f \int_\alpha \frac{d\lambda}{D_\lambda},$$

P, Q, R ont les valeurs données par (16).

En prenant la dérivée partielle de (21) par rapport à x on aura

$$(23) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_u}{\partial x} - Px - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} x^2 + \frac{\partial Q}{\partial x} y^2 + \frac{\partial R}{\partial x} z^2\right) = -Px.$$

En effet V_u est fonction de x, y, z par la limite u seulement (2), on a

$$(24) \quad \frac{\partial V_u}{\partial x} = \frac{dV_u}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = -\pi f \int_\alpha^0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d\rho}{D_u}.$$

D_u est égal a D_λ où l'on a remplacé λ par u.

De même pour P, Q, R, il ne restera dans la dérivée d'après (16) que le terme contenant u comme limite d'intégrale

$$(25) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = -2\pi f \int_\alpha^0 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{a^2+u} \frac{d\rho}{D_u},$$

$$\frac{dP}{du} = -2\pi f \int_\alpha^0 \frac{1}{a^2+u} \frac{d\rho}{D_u},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} x^2 + \frac{\partial Q}{\partial x} y^2 + \frac{\partial R}{\partial x} z^2 = -2\pi f \int_\alpha^0 \left(\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\rho}{D_u}.$$

La parenthèse est égale à 1 d'après (2). L'expression est égale à $2\frac{\partial V_u}{\partial x}$. Dans (23) il reste seulement le terme Px et l'on a

$$(26) \quad X = \frac{\partial V}{\partial x} = -Px, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -Qy, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z} = -Rz.$$

Les dérivées partielles du potentiel et les composantes de la force ont les mêmes expressions que pour l'ellipsoïde homogène.

Remarque. — Pour un point extérieur à l'ellipsoïde hétérogène, il faudra intégrer de 1 à 0 avec u. On aura

$$V = \pi f \int_1^0 d\varphi \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

On obtiendra les mêmes formules (24) et (25) et les mêmes résultats.

69. Vérification des conditions du potentiel. — Ces conditions sont au nombre de trois :

1° La fonction V est finie et continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées partielles première et deuxième.

2° Elle s'annule à l'infini.

Ces deux conditions se vérifient, comme pour les ellipsoïdes homogènes, puisque ce sont les mêmes formules.

3° Elle vérifie l'équation de Laplace pour un point extérieur et celle de Poisson pour un point intérieur, rayon vecteur $r(x, y, z)$

$$(27) \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \qquad \Delta V = -4\pi f\rho.$$

Nous allons vérifier ces relations.

Prenons de nouveau les dérivées partielles des expressions (26), nous aurons

$$(28) \qquad -\Delta V = (P + Q + R) + \left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

D'après les valeurs de P, Q, R dans (16) on a,

$$(29) \qquad P + Q + R = 2\pi f \int_\alpha \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_\lambda},$$

$$(30) \qquad P + Q + R = -2\pi f \int_\alpha \frac{1}{D_\lambda}\,\frac{dD_\lambda^2}{D_\lambda^2} = -4\pi f \int_\alpha d\left(\frac{1}{D_\lambda}\right);$$

car il suffit de prendre la dérivée logarithmique de D^2 (8) pour retrouver la parenthèse sous l'intégrale. On aura pour expression

de l'intégrale en α

$$(31)\quad \int_1^\alpha d\rho \int_0^\infty d\left(\frac{1}{D_\lambda}\right) + \int_\alpha^0 d\rho \int_u^\infty d\left(\frac{1}{D_\lambda}\right) = -\int_1^\alpha d\rho - \int_\alpha^0 \frac{d\rho}{D_u};$$

car les intégrales sont nulles à l'infini, puisque $D_\infty = \infty$, pour $\lambda = \infty$, et $D_0 = 1$, D_u est la valeur de D_λ pour $\lambda = u$.

La seconde parenthèse de (28) d'après (25), pourra alors s'écrire

$$(32)\quad x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}$$
$$= -2\pi f \int_\alpha^0 \left(\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{d\rho}{D_u}.$$

Or en dérivant (2) partiellement et successivement par rapport à x, y, z on obtient

$$(33)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+u)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2+u}, \\ B\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2+u}, \quad B\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2+u}, \quad B\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2z}{c^2+u}. \end{cases}$$

B est une valeur positive. On tire de là $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ que l'on porte dans (32). On retrouve B en numérateur et en dénominateur et il vient

$$(34)\quad x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z} = -4\pi f \int_\alpha^0 \frac{d\rho}{D_u}.$$

Nous retrouvons le second terme de (31), qui sera détruit en portant ces valeurs dans (28). Cette formule devient

$$(35)\quad \Delta V = -4\pi f \int_1^\alpha d\rho = -4\pi f \rho,$$

car l'intégrale de $d\rho$ de 1 à α contient ρ_1 la densité superficielle, à laquelle nous ajoutons les accroissements de densité $d\rho$ jusqu'à la couche d'axe α, ce qui donne ρ la densité de cette couche et la formule de Poisson.

Pour un point extérieur il faut faire ici $\alpha = 1$ et l'on a $\Delta V = 0$, l'équation de Laplace.

70. Expression de la vitesse de rotation et équation de condition. — Les équations de l'équilibre hydrodynamique, comme nous l'avons vu dans la première partie, sont les mêmes pour l'équilibre relatif et le mouvement permanent. D'après l'expression du potentiel en fonction de P, Q, R, et des composantes de la force, les trois équations algébriques de l'équilibre pourront s'écrire

$$(36)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = (\omega^2 - \mathrm{P})\,x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = (\omega^2 - \mathrm{Q})\,y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -\mathrm{R}z.$$

Or dans l'équilibre relatif et dans le mouvement permanent, où le champ des forces n'est pas tourbillonnaire, les surfaces de niveau ou d'égale pression, coïncident avec les surfaces d'égale densité. Ces dernières sont les surfaces ellipsoïdales données par (10), dont les composantes de la normale sont $\frac{x}{\alpha^2}$, $\frac{y}{\beta^2}$, $\frac{z}{\gamma^2}$. Elles sont proportionnelles à celles de (36), car ces normales aux deux sortes de surfaces doivent coïncider. On a alors

$$(37)\,(38)\qquad (\mathrm{P} - \omega^2)\,\alpha^2 = (\mathrm{Q} - \omega^2)\,\beta^2 = \gamma^2 \mathrm{R}.$$

On tire des formules ci-dessus l'expression de la vitesse ω, et l'équation de condition indépendante de ω,

$$(39)\qquad \omega^2 = \mathrm{P} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\mathrm{R} = \frac{\alpha^2\mathrm{P} - \beta^2\mathrm{Q}}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$(40)\qquad \alpha^2\beta^2(\mathrm{P} - \mathrm{Q}) + \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)\,\mathrm{R} = 0.$$

Dans l'équilibre relatif ω à la même valeur pour tous les points. Dans l'équilibre permanent, ω est variable, mais les surfaces sont de révolution, $\alpha = \beta$ et P et Q,

Ce sont les mêmes formules que pour les ellipsoïdes homogènes, (*voir* t. IV, n° 20). Mais ici P, Q, R sont variables d'un point à un autre et d'une surface à l'autre. Ces expressions écrites avec une seule intégrale (16), sont

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{P}}{2\pi f} = \displaystyle\int_\alpha \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\,\mathrm{D}_\lambda}, \qquad \dfrac{\mathrm{Q}}{2\pi f} = \displaystyle\int_\alpha \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\,\mathrm{D}_\lambda}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\mathrm{R}}{2\pi f} = \displaystyle\int_\alpha \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\,\mathrm{D}_\lambda}. \end{array}\right.$$

En portant ces valeurs dans (39) la vitesse de rotation s'écrira

sous l'une des formes

$$(42)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f}=\frac{1}{\alpha^2}\int_\alpha\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}-\frac{\gamma^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_\lambda}=\frac{1}{\beta^2}\int_\alpha\left(\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}-\frac{\gamma^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_\lambda},$$

$$(43)\qquad \omega^2=\frac{2\pi f}{\alpha^2-\beta^2}\int_\alpha\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}-\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

On aura de même

$$(44)\qquad \frac{P-Q}{2\pi f}=\int_\alpha\frac{b^2-a^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{d\lambda}{D_\lambda},$$

et l'équation de condition devient

$$(45)\qquad (\alpha^2-\beta^2)\gamma^2\int_\alpha\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D_\lambda}=\alpha^2\beta^2\int_\alpha\frac{a^2-b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\cdot\frac{d\lambda}{D_\lambda}.$$

71. Identification avec les formules des ellipsoïdes homogènes. — Comme pour les ellipsoïdes homogènes, t. IV, n° **20**, posons $\lambda=c^2x$, où x est une variable définie par cette relation et non une coordonnée. Introduisons de même les rapports des axes s et t, que nous désignerons par σ et τ sur la surface d'axes α, β, γ sur laquelle se trouve le point x, y, z. On a

$$(46)\qquad \frac{c^2}{a^2}=s,\qquad \frac{c^2}{b^2}=t,\qquad \frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\sigma,\qquad \frac{\gamma^2}{\beta^2}=\tau,$$

$$(47)\,(48)\quad \left\{\begin{array}{l} c^2=a^2s=b^2t,\qquad \gamma^2=\alpha^2\sigma=\beta^2\tau,\\ \lambda=c^2x,\qquad d\lambda=c^2dx,\qquad c^2+\lambda=c^2(1+x),\\ a^2+\lambda=a^2(1+sx),\qquad D_\lambda=\sqrt{(1+x)(1+sx)(1+tx)}=D_x.\end{array}\right.$$

On obtient pour D_λ la même expression D_x que pour les ellipsoïdes homogènes. Nous retrouvons de même pour P, Q, R

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{2\pi f}=\displaystyle\int_\alpha\frac{s\,dx}{(1+sx)D_x},\qquad \dfrac{Q}{2\pi f}=\displaystyle\int_\alpha\frac{t\,dx}{(1+tx)D_x},\\ \dfrac{R}{2\pi f}=\displaystyle\int_\alpha\frac{dx}{(1+x)D_x}.\end{array}\right.$$

On aura, d'après les formules (39), pour ω^2,

$$(50)\qquad \omega^2=P-\sigma R=Q-\tau R=\frac{\tau P-\sigma Q}{\tau-\sigma}$$

et

(51) $$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_\alpha \frac{s\,dx}{(1+sx)\,D_x} - \sigma \int_\alpha \frac{dx}{(1+x)\,D_x}$$
$$= \int_\alpha \frac{t\,dx}{(1+tx)\,D_x} - \tau \int_\alpha \frac{dx}{(1+x)\,D_x},$$

(52) $$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_\alpha \left(\frac{\tau s - \sigma t}{\tau - \sigma} + stx\right) \frac{(1+x)\,dx}{D^3}.$$

Les valeurs de ω^2 diffèrent de celles trouvées pour les ellipsoïdes homogènes en ce que nous avons σ et τ au lieu de s et t dans (51). Dans (52) il y a le premier terme de la parenthèse en plus, il s'annule si nous faisons s et t égaux à σ et τ, et nous retrouvons la formule (62) du tome IV, 1[er] fascicule.

L'équation de condition s'écrit immédiatement d'après (40) divisé par γ^4, ou directement par (50)

(53) $$\frac{1}{\sigma\tau}(P - Q) - \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}\right) R = 0, \qquad P - Q = (\sigma - \tau)\,R.$$

On voit qu'elle ne dépend plus que du rapport des axes et non des axes eux-mêmes, de la forme des surfaces, et non des dimensions.

On a encore d'après (44)

(54) $$\frac{P - Q}{2\pi f} = \int_\alpha \frac{s - t}{(1+sx)(1+tx)} \frac{dx}{D_x}.$$

L'équation de condition s'écrit alors

(55) $$\int_\alpha \left[\frac{s - t}{(1+sx)(1+tx)} - \frac{\sigma - \tau}{1+x}\right] \frac{dx}{D_x} = 0.$$

Cette condition était unique pour les ellipsoïdes homogènes. Ici la condition (55) doit être vérifiée pour tous les points de la masse, car l'intégrale dépend de la position du point.

Si l'ellipsoïde est homogène, les surfaces de niveau sont homothétiques, on a partout

$$s = \sigma, \qquad t = \tau, \qquad s - t = \sigma - \tau.$$

Cette dernière expression est en facteur et l'on a deux solu-

tions distinctes, l'intégrale en α devient une intégrale simple

$$(56) \qquad s = t, \qquad \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+sx)(1+tx)} - \frac{1}{1+x}\right] \frac{dx}{D_x} = 0.$$

La première solution nous donne les ellipsoïdes de révolution, la seconde donne la condition que doivent remplir les ellipsoïdes à trois axes ou de Jacobi pour être figures d'équilibre. C'est la formule (62) du tome IV.

Pour les ellipsoïdes hétérogènes au contraire, l'équation de condition (55) ne peut pas se résoudre en deux solutions distinctes pour tous les points et n'a qu'une solution unique, celle des ellipsoïdes de révolution. On retrouve ce théorème fondamental, démontré dans la première Partie, que pour une masse hétérogène les surfaces de niveau doivent être de révolution, n° 31.

Cependant si les surfaces de niveau et d'égale densité étaient toutes homothétiques, nous trouverions encore les deux solutions (56). Mais la seconde, où l'intégrale double en α devrait être conservée, ne serait vérifiée que par des ellipsoïdes homofocaux, comme on le verra, ce qui est incompatible avec les ellipsoïdes semblables.

72. L'axe de rotation est le plus petit axe des ellipsoïdes. — L'expression de ω^2 (51) peut s'écrire

$$(57) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_\alpha \frac{s(1+x) - \sigma(1+sx)}{(1+x)(1+sx)} \frac{dx}{D_x} = \int_\alpha \frac{(s-\sigma) + (1-\sigma)sx}{(1+x)(1+sx)} \frac{dx}{D_x}.$$

s varie d'une façon continue du centre à la surface. Prenons pour σ la couche où s est maximum. On aura pour tous les éléments d'intégration $s - \sigma < 0$. De plus $1 - \sigma$ est une constante. Il faut donc $1 - \sigma > 0$ autrement tous les éléments d'intégration seraient négatifs et ω^2 également. Il faut donc

$$(58) \qquad \sigma < 1, \qquad \frac{\gamma^2}{\alpha^2} < 1, \qquad \gamma < \alpha.$$

La seconde équation (51) en t et τ donnerait de même $\gamma < \beta$.

L'axe de rotation γ est donc le plus petit des trois axes sur la couche de niveau où σ (ou τ) est maximum. Or les surfaces de niveau, ou les surfaces équipotentielles, ne peuvent pas se couper.

Si l'axe de rotation est le plus petit des trois axes sur une surface il doit l'être pour toutes.

73. **Théorème de M. Hamy.** — *Dans l'équilibre relatif, les couches de même densité d'une masse hétérogène ne peuvent pas être ellipsoïdales.*

La formule qui exprime la rotation ω peut s'écrire

$$\omega^2 = P - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} R = P - \sigma R, \qquad o\sigma = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}.$$

Cette quantité doit être constante dans toute la masse.

On aura donc, en tout point x, y, z, et pour toute variation de ces coordonnées,

$$(59) \qquad d\omega^2 = dP - \sigma\, dR - R\, d\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial u} - \sigma \frac{\partial R}{\partial u}\right) du - R\, d\sigma = 0.$$

En effet P et R, d'après (16), sont fonctions de x, y, z uniquement par la limite u de la troisième intégrale.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{\partial P}{\partial u} du.$$

D'après les formules (25), qui donnent $\frac{\partial P}{\partial u}$ et $\frac{\partial R}{\partial u}$, on aura

$$(60) \qquad d\omega^2 = -\frac{2\pi f}{\alpha^2} \int_\alpha^0 \left(\frac{\alpha^2}{a^2 + u} - \frac{\gamma^2}{c^2 + u}\right) du \frac{d\rho}{D_u} - R\, d\sigma = 0.$$

La valeur de du est donnée par la différentiation de (2), et s'écrit, d'après la valeur de B (33),

$$(61) \qquad B\, du = 2\left(\frac{x\, dx}{a^2 + u} + \frac{y\, dy}{b^2 + u} + \frac{z\, dz}{c^2 + u}\right).$$

Considérons un déplacement de x, y, z sur une couche de même densité. Les axes α, β, γ et σ restent fixes, donc $d\sigma = 0$, le second terme de $d\omega^2$ est nul. Il faut et il suffit que le premier le soit aussi.

Considérons un déplacement tel que $dy = 0$, parallèle au plan xOz, nous aurons, sur la couche considérée, d'après (10),

$$\frac{x\, dx}{\alpha^2} + \frac{z\, dz}{\gamma^2} = 0.$$

Portons cette valeur de $x\,dx$ dans l'expression (61) de du,

$$(62)\qquad \mathrm{B}\,du = -\frac{2z\,dz}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right).$$

Cette valeur portée dans $d\omega^2$ donne, pour la variation sur la surface considérée, le long du déplacement ds considéré

$$(63)\qquad d\omega^2 = \frac{\partial\omega^2}{\partial s}ds = +\frac{4\pi f}{\alpha^2\gamma^2}z\,dz\int_\alpha^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)^2\frac{d\rho}{\mathrm{BD}_u},$$

B et D_u (8) sont des quantités essentiellement positives. Tous les éléments de l'intégrale sont donc positifs. On ne peut avoir $d\omega^2 = 0$ que si tous les éléments d'intégration sont nuls, c'est-à-dire

$$\frac{\alpha^2}{a^2+u} = \frac{\gamma^2}{c^2+u} = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{a^2-c^2},\qquad a^2-c^2 = k(\alpha^2-\gamma^2).$$

La différence des carrés des axes doit être constante. Les ellipsoïdes doivent être tous *homofocaux*.

Portons alors ces valeurs dans l'expression (60), le premier terme s'annule identiquement. Il reste $d\sigma = 0$. Le rapport des axes devrait être invariable. Les ellipsoïdes devraient être *homothétiques*. Comme ils ne peuvent pas être à la fois homofocaux et homothétiques, l'équilibre relatif, ou la rotation en bloc, est impossible avec des figures ellipsoïdales.

Remarque. — Dans le cas du *régime permanent*, la seconde condition de l'équilibre hydrodynamique n° 48, les surfaces étant de révolution, s'écrit d'après (60)

$$y\frac{\partial\omega^2}{\partial x} - x\frac{\partial\omega^2}{\partial y} = -\frac{2\pi f}{\alpha^2}\int_\alpha^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\left(y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{d\rho}{\mathrm{D}_u}$$

et l'on vérifie que la dernière parenthèse est nulle d'après (33) avec $b = a$. Mais on ne vérifie pas la première condition $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$.

Dans le cas des *ellipsoïdes de révolution*, avec $b = a$ et $\beta = \alpha$, on voit facilement que l'on a encore (62) et (63) pour n'importe quel déplacement dx et dy, sur la couche considérée.

74. Expressions en coordonnées polaires. Variation de la vitesse de rotation en latitude. — On aura une représentation plus

claire de la variation de ω qu'avec les coordonnées cartésiennes x, y, z. On éliminera r, on fera φ constant et l'on prendra la variation par rapport à la distance angulaire θ au pôle.

On obtiendra de la même façon qu'au n° 73 la variation de ω par rapport à θ. Il suffira de faire dans (60) $d\sigma = 0$, le déplacement ayant lieu sur la surface, et d'indiquer que la dérivation a lieu uniquement par rapport à θ,

$$(65) \qquad \frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{2\pi f}{\alpha^2}\int_\alpha^0 \left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{d\rho}{D_u}.$$

Il faut calculer $\frac{\partial u}{\partial\theta}$. L'équation des ellipsoïdes de niveau et celle qui détermine u, (10) et (2), s'écriront en coordonnées polaires

$$(66) \qquad \begin{aligned} \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2} + \frac{\cos^2\theta}{\gamma^2} &= \frac{1}{r^2}, \\ \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{a^2+u} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{b^2+u} + \frac{\cos^2\theta}{c^2+u} &= \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

En éliminant r et prenant les dérivées par rapport à θ on a immédiatement, u étant fonction de θ,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{(a^2+u)^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(b^2+u)^2} + \frac{\cos^2\theta}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\theta} \\ &= 2\sin\theta\cos\theta\left[\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2+u} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2+u} - \frac{1}{c^2+u}\right) - \left(\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

La parenthèse du premier membre est égale à $\frac{B}{r^2}$ d'après (33) et (61), n° 73. Le crochet du second membre, d'après (66), en y remplaçant $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$, se réduit à l'expression suivante divisée par $\sin^2\theta$,

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2+u}\right) - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{c^2+u}.$$

Il vient

$$(67) \qquad \frac{B}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} = 2\frac{\cot\theta}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right).$$

En portant cette valeur de $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ dans (65) on a finalement

$$(68) \qquad \frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{4\pi f}{\alpha^2\gamma^2}\cot\theta\int_\alpha^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{r^2\,d\rho}{B\,D_u}.$$

On obtiendrait de même une autre formule analogue en b^2 et β^2. Pour les ellipsoïdes homofocaux, la première parenthèse est nulle et l'on a $d\omega^2 = 0$. La vitesse de rotation doit être partout la même sur une même surface de niveau. Les couches d'égale densité devraient tourner chacune d'une seule pièce, pour réaliser les conditions d'équilibre des ellipsoïdes homofocaux.

La quantité sous l'intégrale n'est pas un carré parfait comme dans (63). On peut montrer néanmoins qu'elle est toujours positive et que la vitesse de rotation, dans les autres cas que les ellipsoïdes homofocaux, et sur une surface de niveau, doit varier en raison inverse de θ, signe —, c'est-à-dire *décroître du pôle à l'équateur*. On remarque que pour le Soleil, Jupiter, c'est le contraire qui a lieu. La vitesse de rotation est plus grande à l'équateur qu'aux pôles. Les surfaces de niveau de ces astres ne peuvent pas être ellipsoïdales, et doivent s'en éloigner davantage que si ces astres tournaient tout d'une pièce.

En multipliant la première des équations (66) par $\frac{\gamma^2}{c^2+u}$ et la retranchant de la seconde, on a

$$(69) \qquad \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right) + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right) = \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right).$$

On voit ici que les deux parenthèses du premier membre sont du même signe que la troisième, car autrement on pourrait trouver un point, sur la couche considérée, et une valeur de φ, telle que les deux membres seraient de signe contraire. L'expression (68) est donc toujours positive, les deux parenthèses ayant toujours le même signe. On ne peut donc jamais avoir rotation en bloc, ou $d\omega^2 = 0$. C'est une nouvelle démonstration du théorème du n° 73.

En remplaçant la seconde parenthèse de l'intégrale (68) par sa valeur ci-dessus, on obtiendra sous le signe somme, en supprimant le facteur commun $\sin^2\theta$,

$$\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)^2 + \frac{\cos^2\varphi}{\beta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\left(\frac{\beta^2}{b^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+a}\right).$$

On aurait un carré parfait seulement pour $\cos\varphi = 0$, ou $y = 0$,

c'est-à-dire pour la variation de la vitesse de rotation sur le plan yOx comme dans le numéro 73.

Il en serait de même dans le cas des ellipsoïdes de révolution avec $\beta = \alpha$ et $b = a$, alors φ disparaît et (68) devient

$$(68') \qquad \frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{4\pi f}{\alpha^4\gamma^2}\sin\theta\cos\theta\int_\alpha^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)^2\frac{r^4}{B}\,\frac{d\rho}{D_u}.$$

75. **Variation de la vitesse de rotation en profondeur.** — Nous prenons θ et φ constants et r seul variable. En prenant la même formule (60) qu'au numéro 73 pour ω^2, et en indiquant la dérivation par rapport à r, on aura

$$(70) \qquad \frac{d\omega^2}{dr} + R\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{2\pi f}{\alpha^2}\int_\alpha^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{d\rho}{D_u}.$$

D'après (66) on aura pour $\frac{\partial u}{\partial r}$, θ et φ restant constants,

$$\left[\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{(a^2+u)^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(b^2+u)^2}+\frac{\cos^2\theta}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{r^3}.$$

En multipliant les deux membres par r^2, on peut écrire cette valeur

$$(71) \qquad \left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{r}, \qquad B\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{r}.$$

Et la formule (70) devient

$$(72) \qquad \frac{d\omega^2}{dr} + R\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{4\pi f}{\alpha^2}\int_r^0\left(\frac{\alpha^2}{a^2+u}-\frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{d\rho}{rBD_u}$$
$$= -4\pi f\int_r^0\left(\frac{1}{a^2+u}-\frac{\sigma}{c^2+u}\right)\frac{d\rho}{rBD_u}.$$

On aurait une autre formule en τ et b^2, en partant de $\omega^2 = Q - \tau R$. Pour les ellipsoïdes homofocaux le second membre est nul. On peut tirer de (72) les mêmes conclusions que plus haut, ω^2 varie en sens inverse de σ et réciproquement.

Remarque I. — La valeur de la variation le long du grand axe peut se déduire de (72). Il suffit d'y faire $r = x = \alpha$, et de remar-

quer que l'on a sur l'axe considéré

$$B = \frac{x^2}{(\alpha^2+u)^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\alpha^2+u} = 1. \tag{73}$$

Remarque II. — La formule (72) remplace la formule (14), de ma thèse, qui contenait une légère erreur. Cette erreur était d'ailleurs corrigée en note, à la fin du même travail, *Journal de Mathémathiques pures et appliquées,* 1912, p. 464. M. Dive a plus tard relevé cette erreur dans *Archives des Sc. phys. et nat. de Genève*, 1926, p. 118, supplément, sans s'apercevoir qu'elle était déjà corrigée.

76. **Ellipsoïdes homofocaux et ellipsoïdes homothétiques. Ellipsoïdes limites.** — On a déjà vu au numéro 74 que la vitesse de rotation doit croître de l'équateur au pôle sur chaque surface de niveau pour assurer l'équilibre hydrostatique, au moins dans le cas où les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité et où les surfaces sont de révolution.

Pour la variation de la vitesse de rotation en profondeur nous distinguerons *deux groupes d'ellipsoïdes*, séparés par les ellipsoïdes homofocaux et les ellipsoïdes homothétiques.

Dans une masse hétérogène, où les surfaces de niveau seraient toutes homofocales, l'aplatissement tendrait vers l'infini au centre. On peut admettre que l'aplatissement ne peut pas croître plus vite de la surface au centre, et que c'est un cas limite. Entre les surfaces homofocales et les surfaces homothétiques, où l'aplatissement serait partout le même, on aura un groupe d'ellipsoïdes où l'aplatissement ira en croissant de la surface au centre. Au-dessous des ellipsoïdes homothétiques on aura un autre groupe où l'aplatissement décroîtra de la surface au centre. Dans le premier groupe, les rapport des axes au plus petit, σ et τ, diminuent de la surface au centre. Ils sont nuls au centre pour les ellipsoïdes homofocaux. Ils sont constants pour les homothétiques. Ils augmentent de la surface au centre pour l'autre groupe.

Si les surfaces sont *homofocales*, l'intégrale de la formule (72) est nulle. Cette formule devient

$$\frac{d\omega^2}{dr} = -R\frac{d\sigma}{dr}, \qquad \sigma = \frac{\Upsilon^2}{\alpha^2}. \tag{74}$$

Or, comme σ décroît à partir de la surface, on aura

$$\frac{d\sigma}{dr} > 0, \qquad \frac{d\omega^2}{dr} < 0.$$

La vitesse de rotation croît de la surface au centre.

Pour les surfaces *homothétiques* on a $d\sigma = 0$ et la formule (72) devient

$$(75) \qquad \frac{d\omega^2}{dr} = -\frac{4\pi f}{\alpha^2}\int_r^0 \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{d\rho}{r\,\mathrm{BD}_u}.$$

Or la parenthèse est toujours positive de 0 à r et $\frac{d\omega^2}{dr} < 0$. On a la même conclusion. La vitesse croît encore de la surface au centre. Il en serait de même pour tout le premier groupe situé entre les deux.

77. Conclusions. Loi de Clairaut généralisée. — Considérons maintenant le second groupe, en dessous des homothétiques. Les rapports des axes σ et τ décroissent du centre à la surface. On a

$$\frac{d\sigma}{dr} < 0, \qquad \frac{d\tau}{dr} < 0, \qquad \sigma = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}.$$

Dans l'expression de la variation de ω^2 sur le rayon vecteur

$$(76) \qquad \frac{d\omega^2}{dr} = -\mathrm{R}\frac{d\sigma}{dr} - \frac{4\pi f}{\alpha^2}\int_\alpha^0 \left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{d\rho}{r\,\mathrm{BD}_u},$$

le premier terme du second membre est positif, le second au contraire est négatif, et $d\omega^2$ pourrait s'annuler. On aurait alors

$$(77) \qquad \mathrm{R}\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{4\pi f}{\alpha^2}\int_\alpha^0 \left(\frac{\alpha^2}{a^2+u} - \frac{\gamma^2}{c^2+u}\right)\frac{d\rho}{r\,\mathrm{BD}_u}.$$

Or au voisinage des ellipsoïdes homothétiques, on a $\frac{d\omega^2}{dr} < 0$. D'autre part on a vu, d'après la variation en latitude, que la vitesse sur une couche doit toujours croître du pôle à l'équateur. De plus pour l'équilibre hydrodynamique, la vitesse de rotation doit être la même à la même distance de l'axe de rotation. Par conséquent la vitesse de rotation doit toujours être décroissante du centre à la surface. dans le cas où les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité et où l'ensemble obéit aux lois de l'hydro-

dynamique. On a donc encore dans ce cas $\frac{d\omega^2}{dr} < 0$ et cette expression ne peut pas s'annuler.

En tout cas dans l'équilibre relatif, avec rotation en bloc, $d\omega^2 = 0$ nous aurions des figures voisines des ellipsoïdes, auxquelles les résultats s'appliquent pratiquement en première approximation.

On aura donc

$$\frac{d\sigma}{dr} < 0, \tag{77}$$

comme dans tout le second groupe considéré. Les aplatissements seront toujours croissants de la surface au centre. Ce sera une généralisation d'un *théorème de Clairaut*, qui avait été établi seulement dans le cas des faibles vitesses de rotation et des faibles aplatissements.

78. **Dans le mouvement permanent, si les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité, elles ne peuvent pas être non plus ellipsoïdales. Calculs de MM. Wavre et Dive.** — C'est l'extension du théorème de M. Hamy (nº 73), au cas du mouvement permanent. C'est un cas plus général que le précédent, mais où la variation de la vitesse de rotation ω est limitée par la relation $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$.

Or, dans ce cas du mouvement permanent, les surfaces doivent être de révolution. On peut ne considérer la valeur de ω que sur l'ellipse méridienne et faire $y = 0$ pour simplifier. On pourra écrire l'équation de l'ellipse, où se trouve le point considéré (10)

$$z^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \gamma^2 - \sigma x^2.$$

Cette valeur portée dans l'expression (2) qui donne u permettra d'exprimer ω^2 en fonction uniquement de γ, σ et x^2. La limite α peut se remplacer par γ, en supposant la densité exprimée en fonction de cet axe. En développant alors la valeur de ω^2 (42) suivant les puissances successives de x^2, on aura une expression de la forme

$$\omega^2 = f(\sigma, \gamma) + \frac{x^2}{\gamma^2} f_1(\sigma, \gamma) + \frac{x^4}{\gamma^4} f_2(\sigma, \gamma) + \ldots. \tag{78}$$

D'après la condition $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$, la vitesse ω^2 doit être uniquement

fonction de x^2. Il faut donc que toutes les fonctions f, qui résultent d'intégrales de o à γ et de γ à 1, soient des constantes. Or la première fonction $f(\sigma, \gamma)$ traduit la relation générale, qui donne le rapport σ des axes pour une couche quelconque γ. La seconde fonction $f_1(\sigma, \gamma)$ donnerait une *autre* formule exprimant la même relation, etc., ce qui est impossible.

On retrouvera l'expression correspondant à (78) dans les calculs de seconde approximation de ma thèse et qui contient le premier terme du développement en x^2 (n° 156). En y ajoutant la condition $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$, que j'ai démontrée plus tard, on pourrait en tirer la même conclusion.

Remarque I. — On ne peut pas tirer directement de (63) la condition $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$; car dans cette formule on considère un déplacement ds sur une *couche déterminée*, et le dz correspondant.

Remarque II. — M. Dive dans sa thèse (n° 80) donne une démonstration de ce théorème en partant de la condition $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$. Comme cette condition est générale et doit se trouver réalisée en chaque point, il en déduit que l'on peut écrire dans les mêmes conditions

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial s\, \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial z\, \partial s} = 0,$$

la dérivation par rapport à s étant prise sur une surface de niveau, comme au n° 73. Après d'assez longs calculs il retrouve donc comme condition celle qu'il a introduite ci-dessus, c'est-à-dire $\frac{\partial \omega^2}{\partial s} = 0$, la formule (66) de sa thèse étant la même que (56). Il retrouve donc la condition (63) du n° 73 ci-dessus et la même impossibilité, les surfaces devraient être à la fois homofocales et homothétiques. Il ne semble pas d'ailleurs que les dérivations suivant s et z soient indépendantes et puissent s'intervertir, la variation suivant s étant liée à la surface d'égale densité, comme il est indiqué à la remarque I ci-dessus.

M. Wavre a démontré que, vers le centre, les surfaces d'égale densité coïncident toujours avec les surfaces de niveau à la limite. Pour rendre les calculs possibles, il a admis en outre que cette

coïncidence des surfaces pouvait se trouver réalisée sur la surface extérieure dans le cas de couches ellipsoïdales et sans que la condition $\frac{\partial\omega^2}{\partial z}$ fut réalisée. Mais il est facile de voir que si la coïncidence est réalisée à la *surface extérieure*, elle doit l'être dans toute la masse, jusqu'au centre, d'après la loi de l'accroissement de pression $dp = g\rho\, dr$. D'ailleurs si la condition de la démonstration Dive ci-dessus est réalisée à la surface, ou bien la condition (60), elles entraînent des conditions d'incompatibilité pour toute la masse, surfaces à la fois homofocales et homothétiques. *Dans aucun cas, la surface extérieure de niveau ne peut être une surface d'égale densité, si elle est ellipsoïdale, et réciproquement.*

A la suite des travaux de M. Wavre, M. Dive, dans sa thèse, avait fait cependant cette hypothèse simplificatrice à la surface et cherché les lois de variation de ω^2, qui conservaient, à l'intérieur, la forme ellipsoïdale d'une couche d'égale densité.

Or admettre la coïncidence des couches d'égale densité et d'égale pression, à la surface comme au centre, c'était l'admettre partout. On comprend donc que M. Dive ait dû retrouver simplement les résultats du second chapitre de ma thèse, où, à la suite de M. Hamy, j'avais fait la même hypothèse de la coïncidence des surfaces. Par malheur, ces calculs et résultats forment plus de la moitié de la thèse de M. Dive.

Remarque. — On verra, au n° 97, que l'expression $\frac{\partial\omega^2}{\partial z}$ est nulle en première approximation. On pourra donc alors regarder la condition hydrodynamique $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$, comme satisfaite partout, à la seule condition que ω^2 soit assez petit. L'approximation dépendra seulement de e^2, comme dans le cas de l'équilibre relatif, et l'erreur sera complètement négligeable pour la Terre. On pourra donc considérer les calculs faits dans l'hypothèse de Clairaut, en première et en seconde approximation, comme valables, pour des surfaces ellipsoïdales, en admettant que la vitesse de rotation varie dans des limites assez larges, de l'ordre de sa propre grandeur. Nous allons voir d'ailleurs que les couches internes restent sensiblement ellipsoïdales, pour n'importe quelle vitesse de rotation.

CHAPITRE VII.

ÉVOLUTION GÉNÉRALE DES FIGURES D'ÉQUILIBRE.

79. **Le Problème posé. Sa solution.** — On a vu dans le premier fascicule de cet ouvrage l'évolution complète d'une masse homogène, depuis la sphère, jusqu'à la figure d'un disque aplati. La figure d'équilibre était ellipsoïdale et d'étude relativement facile.

Pour la masse hétérogène, on a démontré au chapitre précédent que la figure ne peut pas être rigoureusement ellipsoïdale, ce qui complique le problème. J'avais déjà pu montrer du moins dans ma thèse que la figure de la masse hétérogène reste comprise entre celle de deux ellipsoïdes homogènes. Nous verrons de plus ici que cette figure reste sensiblement ellipsoïdale, et que tous les calculs relatifs aux ellipsoïdes peuvent lui être appliqués, avec une grande approximation.

On sait qu'aux faibles vitesses, celle de la Terre et des planètes, les surfaces de niveau sont rigoureusement ellipsoïdales, en première approximation. Nous verrons par un développement analogue, pour les très grandes vitesses et les très grands aplatissements, les figures d'équilibre redevenir rigoureusement ellipsoïdales. On pourra donc développer à partir de la sphère, ou à partir du disque aplati, et raccorder les deux développements, en regardant toujours les figures comme ellipsoïdales, ce qui rend possibles les calculs de tous les éléments que l'on désire connaître à une phase quelconque de l'évolution.

On va établir d'abord une généralisation remarquable des deux limites de l'aplatissement données par Clairaut dans le cas de faibles vitesses de rotation. Elles seront resserrées de plus en plus dans les chapitres suivants.

80. Extension des deux limites de Clairaut, relatives à l'aplatissement, à une masse hétérogène de vitesse quelconque. — Dans sa théorie de la *Figure de la Terre*, Clairaut avait établi deux limites fondamentales de l'aplatissement, qui étaient complètement indépendantes de la loi des densités à l'intérieur. En désignant par φ le rapport de la force centrifuge à l'attraction, on devait avoir pour cet aplatissement e

$$(1) \quad \frac{1}{2}\varphi < e < \frac{5}{4}\varphi, \qquad \frac{1}{230} < e < \frac{1}{575}, \qquad \varphi = \frac{\omega^2 R^3}{fM} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{1}{288}.$$

La limite $\frac{1}{2}\varphi$ ou $\frac{1}{230}$ correspondait à une masse homogène, la seconde $\frac{5}{4}\varphi$ ou $\frac{1}{575}$ correspondait à une masse complètement condensée au centre. Il montrait que les mesures connues alors n'étaient pas assez précises et ne cadraient même pas avec ces limites, pourtant assez étendues.

Ces limites sont évidentes à première vue, car si l'on part de l'ellipsoïde homogène et que l'on concentre d'une façon quelconque ses différentes couches, jusqu'à la réunion de toute la masse au centre, on passera nécessairement d'une façon continue de la valeur $\frac{1}{2}\varphi$ à la limite $\frac{5}{4}\varphi$, et l'aplatissement sera nécessairement une de ces valeurs intermédiaires.

Nous pouvons aller plus loin et préciser que la figure d'équilibre d'une masse hétérogène sera toujours comprise entre celle d'une masse homogène, qui est un ellipsoïde de révolution et celle correspondant à une masse centrale, qui est appelée figure de Roche. En effet en concentrant, comme ci-dessus, la masse homogène d'une façon quelconque, la surface équipotentielle, qu'est la surface extérieure, passera elle aussi d'une façon continue, de l'ellipsoïde de révolution à la figure de Roche correspondante. La figure d'équilibre d'une masse hétérogène sera toujours comprise entre ces deux figures, bien définies.

On peut d'ailleurs définir la valeur de φ pour les *ellipsoïdes homogènes* de révolution et montrer que son rapport avec l'aplatissement e varie très peu quelle que soit la vitesse. En effet la vitesse de rotation ω est reliée à la fonction l, et au rapport des axes de

l'ellipsoïde [1] par la relation

$$(1)' \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{(3 + l^2)\operatorname{arc\,tang} l - 3l}{l^3}, \qquad l^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}.$$

Pour des valeurs très petites de ω ou de l, on a $l^2 = 2e$, et le second membre se réduit à $\frac{8}{15}e$. Dans ce cas, l'attraction F se réduit à $\frac{4}{3}\pi f \rho r$, et l'on a pour φ la valeur de la limite de Clairaut

$$(2) \qquad \varphi = \frac{\omega^2 r}{F} = \frac{2\pi f \rho h}{\frac{4}{3}\pi f \rho} = \frac{3}{2}h = \frac{4}{5}e, \qquad e = \frac{a - c}{a}.$$

En écrivant la valeur générale de F, on aura, pour la valeur générale de φ,

$$(2)' \qquad \varphi = \frac{\omega^2 r}{F} = \frac{(3 + l^2)\operatorname{arc\,tang} l - 3l}{(1 + l^2)\operatorname{arc\,tang} l - l}$$

On voit facilement que cette valeur est toujours croissante avec l et l'aplatissement e, depuis sa valeur initiale $\frac{4}{5}e$ jusqu'à sa valeur finale 1, pour l infini. On en conclut ce théorème très important que, dans une masse homogène, la force centrifuge ne peut jamais égaler l'attraction, sauf quand la masse est complètement aplatie en un disque. On verra qu'on a le même théorème pour une masse hétérogène quelconque. On ne peut pas admettre le fractionnement d'un astre, et la formation des astres par simple accroissement de la rotation, à la suite de la contraction.

A la limite d'aplatissement du disque on a donc $e = 1$ et $e = \varphi$. Le rapport de l'aplatissement e et φ reste donc compris, pour une masse homogène, entre les limites assez étroites,

$$1 < \frac{e}{\varphi} < \frac{5}{4}, \qquad \frac{4}{5} < \frac{\varphi}{e} < 1.$$

La variation de $\frac{\varphi}{e}$ n'est que de $\frac{1}{5}$, depuis la sphère, pour de très faibles vitesses, jusqu'au disque très aplati. C'est un phénomène très remarquable, qui sera très utile dans la suite.

---

[1] *Voir* le fascicule de ce tome 4 du *Traité de Mécanique rationnelle* de P. Appell, sur les *Figures d'équilibre d'une masse homogène en rotation.*

Dans le cas d'une masse complètement condensée, comme nous allons le voir au numéro suivant, l'aplatissement est toujours égal à $\frac{\varphi}{2+\varphi}$, valeur qui se confond avec celle de Clairaut $\frac{\varphi}{2}$, quand φ est assez faible, c'est-à-dire quand la vitesse de rotation est petite.

La figure d'une masse hétérogène quelconque étant intermédiaire entre celle d'une masse homogène et celle d'une masse complètement condensée, son aplatissement e restera compris entre les limites

$$(3)\qquad \frac{4}{5}\frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{e} < \frac{2}{\varphi} < \frac{2}{\varphi}+1, \qquad \frac{\varphi}{2+\varphi} < e < \frac{5}{4}\varphi.$$

Dans la première formule, les deux termes de gauche, en φ, représentent les limites d'une masse homogène, ceux de droite représentent les limites de l'aplatissement d'une masse condensée.

La seconde formule, absolument générale, comprend pratiquement les mêmes limites que celle de Clairaut (1). Le dénominateur du premier terme varie seulement de 2 à 3. Elle est *applicable à une masse hétérogène quelconque*, de forme quelconque, ellipsoïdale ou non, en toute approximation, dont *la vitesse de rotation serait quelconque*, et cela jusqu'au moment où la force centrifuge égalerait l'attraction à l'équateur, c'est-à-dire pour $\varphi = 1$. Elle donnerait alors, pour la fonction η de Radau, la limite $\frac{11}{2}$ au lieu de 3.

Cette seconde formule et ses limites s'étendraient encore au cas de vitesses internes variables suivant une loi quelconque. En effet, si ces vitesses croissent du centre à la surface, les aplatissements décroissent davantage encore vers le centre. Les surfaces de niveau se rapprochent de la sphère. Leur action devient la même que si leur masse était au centre. Alors $1 : e$ se rapproche de la seconde limite. Dans le cas contraire, les aplatissements tendraient à s'égaliser, et l'aplatissement tendrait vers la même limite que pour une masse homogène, qui est la première limite.

81. La figure de Roche dans le cas d'une masse complètement concentrée. — On suppose une masse m sensiblement réunie en un point, entourée d'une atmosphère étendue, de masse négligeable, le tout soumis à une vitesse de rotation ω. Soit r le rayon vecteur d'un point de la surface extérieure d'ordonnée x, l'axe Oz

étant l'axe de rotation, la section méridienne de la surface équipotentielle, qui définit la surface extérieure, sera donnée par la formule

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + f\frac{m}{r} = f\frac{m}{c}, \qquad r^2 = x^2 + z^2.$$

c définit le rayon polaire, pour $x = 0$, $r = c$, et le second membre est la constante relative à cette surface. Les surfaces équipotentielles internes seraient définies par la même relation.

En désignant par a le rayon équatorial, et faisant $x = r = a$ dans (4), on obtiendra l'expression de l'aplatissement

$$(5) \qquad e = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{fm}\frac{c}{a} = \frac{1}{2}\varphi\frac{c}{a}, \qquad e = \frac{\varphi}{2+\varphi}.$$

Pour les faibles vitesses, on a sensiblement $c = a$ et $e = \frac{1}{2}\varphi$. c'est la limite de Clairaut.

Si l'atmosphère, sans masse appréciable, s'étendait très loin, la masse m et la rotation ω étant données, on trouverait toujours une valeur de a, où l'on aurait $\varphi = 1$. La force centrifuge égalerait l'attraction à l'équateur. Les particules resteraient en équilibre à cette distance, et formeraient, dans le plan équatorial un anneau analogue à l'anneau de Saturne. Les autres particules superficielles glisseraient vers l'équateur. La masse augmenterait de vitesse en se refroidissant et se contractant et finalement toute la masse se trouverait former un disque avec la masse m au centre, le reste de la masse étant négligeable. La vitesse de toutes les particules suivrait la troisième loi de Képler.

Au début du phénomène de la libération des particules, comme à n'importe quel moment ensuite, on a $\varphi = 1$ et la formule (5) donne, pour le rapport des axes et l'aplatissement,

$$(6) \qquad a = \frac{3}{2}c, \qquad e = \frac{1}{2}\frac{c}{a} = \frac{1}{3}.$$

Le rayon équatorial est égal à une fois et demi le rayon polaire.

Le rapport de e sur φ, qui était $\frac{1}{2}$ au début aux faibles vitesses, est devenu $\frac{1}{3}$ à la fin, et a varié également très peu, de $\frac{1}{6}$,

$$(7) \qquad \frac{1}{3} < \frac{e}{\varphi} < \frac{1}{2}, \qquad 2 < \frac{\varphi}{e} < 3.$$

De même si l'on considère une masse m, dont l'atmosphère s'étende à une distance a et que sa rotation augmente, l'aplatissement passe de $\frac{1}{2}\varphi$ à $\frac{1}{3}\varphi$, moment où l'anneau commence à se former.

La surface équipotentielle extérieure, pour une masse hétérogène quelconque, sera comprise entre l'ellipsoïde homogène et la figure de Roche. Son rapport $e : \varphi$, sera compris entre les limites de Clairaut, au début, au voisinage de la sphère, c'est-à-dire entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$,

$$\frac{1}{2} < \frac{e}{\varphi} < \frac{5}{4}. \tag{7'}$$

A la fin, au voisinage du disque aplati, ou du moment où la force centrifuge arrive à égaler l'attraction, formation de l'anneau, il sera compris entre $\frac{1}{3}$, valeur pour la figure de Roche, et 1 valeur pour l'ellipsoïde homogène

$$\frac{1}{3} < \frac{e}{\varphi} < 1, \qquad 1 < \frac{\varphi}{e} < 3. \tag{7''}$$

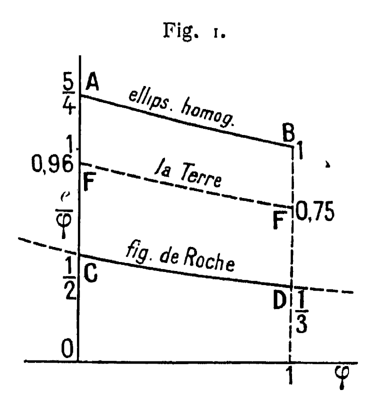
Le rapport de ces deux limites est égal a 3. Il était égal à 2,5 au début, aux faibles vitesses. Il ne varie donc lui-même que du sixième de sa valeur. D'ailleurs la première limite passe d'une façon continue de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$ et la seconde de $\frac{5}{4}$ à 1, presque linéairement ou du moins suivant une partie d'hyperbole équilatérale d'après (5).

Nous voyons à quel point déjà la figure d'une masse hétérogène quelconque est renfermée entre des *limites assez étroites* du commencement à la fin de son évolution, dans le cas de l'équilibre relatif, où elle tourne en bloc, comme un corps solide.

De plus, comme d'après la remarque du paragraphe précédent, le rapport $\frac{e}{\varphi}$ varie dans le même sens et sensiblement de la même grandeur, à 1/6e près, et de la même façon, dans les deux cas extrêmes, de la masse homogène et de la masse complètement concentrée, on peut en conclure, avec une grande probabilité, qu'il en sera de même pour une masse hétérogène quelconque. La valeur du rapport $e : \varphi$, entre 1/2 et 5/4, définira d'une façon pré-

cise la concentration de la matière à l'intérieur. De plus sa valeur étant connue aux faibles vitesses de rotation comme pour la Terre, Jupiter, Saturne, on peut en déduire la variation probable de ce rapport au cours de l'évolution possible avec une première approximation très approchée. Pour la Terre la valeur de $e : \varphi$ est actuellement 0,96. Si elle se contractait indéfiniment, ce rapport s'abaisserait à 0,75, au moment où la masse équatoriale commencerait à former un anneau, courbe EF figure 1.

Fig. 1.



82. **Les figures de Roche sont sensiblement ellipsoïdales, celles d'une masse hétérogène à plus forte raison. Impossibilité d'un fractionnement.** — La figure limite de Roche, à aplatissement maximum, $\varphi = 1$, est atteinte pour $a = \frac{3}{2}c$. Prenons le petit axe pour unité $c = 1$ et $a = \frac{3}{2}$. L'ellipse méridienne, ayant les mêmes dimensions, aura pour équation

$$(9) \qquad \frac{4}{9}x^2 + z^2 = 1, \qquad r^2 = x^2 + z^2 = 1 + \frac{5}{9}x^2.$$

Dans la figure de Roche, à la limite, on aura, d'après la valeur de φ donnée par (4) et (5),

$$(10) \qquad \frac{\omega^2}{2fm}x^2 + \frac{1}{r} = \frac{1}{c} = 1, \qquad \frac{4}{27}x^2 + \frac{1}{r} = 1, \qquad \varphi = \frac{\omega^2 a^3}{fm} = 1.$$

Désignons par r', cette valeur du rayon vecteur de la figure de Roche. Le rapport des carrés des rayons vecteurs des deux figures,

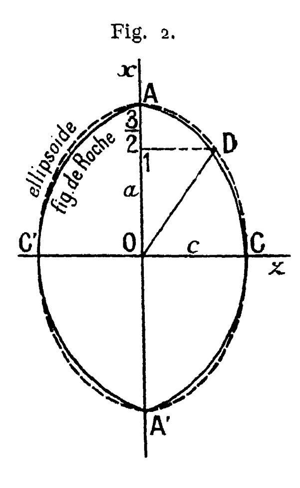
ellipse et figure de Roche, (9) et (10), sera

$$(11)\qquad \frac{r^2}{r'^2} = \frac{(9+5x^2)(27-4x^2)^2}{9\times 27^2}, \qquad \frac{r}{r'} = 1,06.$$

Cette expression égale à 1 pour $x = 0$ et $x = \frac{3}{2}$, sur les axes, a une valeur maximum pour $x^2 = \frac{21}{20}$. Elle donne alors pour le rapport des deux rayons $\frac{r}{r'} = 1,06$.

Le rayon vecteur de l'ellipsoïde de révolution, qui enveloppe

Fig. 2.



complètement la figure de Roche limite, ne dépasse celui de cette figure que de 0,06, moins du dixième. Dans le cas le plus défavorable, la figure de Roche est encore *ellipsoïdale à moins d'un dixième près*. Il en sera de même, à plus forte raison, pour une masse hétérogène incomplètement condensée. La figure 2 représente la figure de Roche limite en traits pleins, et la méridienne de l'ellipsoïde voisin en trait pointillé.

Au lieu de prendre un ellipsoïde qui enveloppe complètement la figure de Roche, si l'on en prend un autre qui coupe légèrement la pointe équatoriale, en faisant $a = 1,45$, par exemple, au lieu de 1,50, on réduit l'écart maximum à 0,04.

D'ailleurs, les calculs de seconde approximation (Chap. XII), nous montrerons que la dépression, au-dessous de l'ellipsoïde, ne peut pas dépasser 5^m, ce qui représente seulement 1 : 2 000 000^e

du rayon. Sur Jupiter, la dépression serait encore inférieure au millième du rayon, avec un aplatissement égal à $1/12^e$. On peut dire que pratiquement, la surface d'une *masse hétérogène ne s'écartera jamais de plus du centième du rayon vecteur de la figure ellipsoïdale.*

Il faut remarquer, en outre, que la figure de Roche est toujours convexe, ne présente pas de point d'inflexion, par conséquent, qu'*elle ne se creuse pas*, et que nulle part il ne peut s'amorcer un fractionnement. On a vu qu'il en était de même pour la fameuse figure piriforme d'une masse homogène. La figure de Roche est un *ellipsoïde légèrement aplati entre les pôles et l'équateur*, cet aplatissement étant inférieur à $0{,}06 = \frac{1}{16}$. Il en sera de même pour une masse hétérogène. Ce n'est là, d'ailleurs, pas autre chose que la déformation, qui correspond à la *première figure de bifurcation* dans les ellipsoïdes de révolution ou de Maclaurin (*voir* premier fascicule, n° 80, remarque III). Le problème des figures de bifurcation se trouve donc par là même résolu.

83. Les deux figures limites entre lesquelles la masse hétérogène reste comprise. — La formule $(1)'$ donne la relation entre la forme d'équilibre de l'ellipsoïde homogène et sa vitesse de rotation, h étant une fonction de l et des axes. En introduisant la masse, on obtient la formule

$$(12) \qquad \omega^2 = \frac{3}{2}\frac{fm}{a^3}h\sqrt{1+l^2}, \qquad m = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 c = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{\sqrt{1+l^2}}.$$

L'expression $h\sqrt{1+l^2}$ est toujours croissante avec l ou avec l'aplatissement. Sa valeur est égale à $\frac{8}{15}e$ pour les faibles vitesses, et $\frac{\pi}{2}$ pour les grandes vitesses de rotation à la limite du disque aplati.

Pour une masse qui se contracte, le moment de rotation ωI doit rester constant. Son carré est égal à $\omega^2 I^2$, et l'on a, pour un ellipsoïde homogène,

$$(13) \qquad \omega^2 I^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}m\right)^2 fmah\sqrt{1+l^2}, \qquad I = \frac{2}{5}ma^2.$$

L'expression $ah\sqrt{1+l^2}$ est donc une constante et permet de

déterminer la valeur du grand axe a en fonction de l'aplatissement et réciproquement. (*Voir* fascicule 1 de ce tome IV, n° 23 *bis*.)

Pour la figure limite de Roche, au moment où la force centrifuge égale l'attraction, la formule (5) pourra s'écrire

$$(14) \qquad \omega^2 = 2f\frac{m}{a^3}\,\frac{a-c}{c}.$$

Au moyen des formules ci-dessus, nous pouvons poursuivre l'évolution d'une masse donnée m et déterminer sa grandeur et sa forme à chaque instant. Pour la masse supposée homogène, la formule (13) permet de déterminer l'aplatissement correspondant au rayon équatorial a, et réciproquement. La formule (12) donne alors la vitesse de rotation correspondante.

Pour la masse complètement concentrée, qui ne possède pas de moment d'inertie ni de moment de rotation défini, nous n'avons pas de formule analogue à (13), mais nous prendrons la même masse m, dont l'atmosphère possède le même rayon équatorial a, la même vitesse de rotation ω. Alors (14) nous permet de calculer le c de la figure de Roche correspondant. Nous avons tous les éléments des deux figures limites entre lesquelles la figure de la masse hétérogène est certainement comprise.

En mettant dans le premier membre les éléments communs aux deux masses, (12) et (14) pourront s'écrire

$$(15) \qquad \frac{\omega^2 a^3}{fm} = \frac{3}{2}h\sqrt{1+l^2} = 2\frac{a-c}{c}.$$

Au moment où la force centrifuge égale l'attraction, pour la masse complètement concentrée, le dernier membre de (15) est égal à 1 d'après (6). Il en est de même du second, ce qui donne $l^2 = 7{,}90$ et $\frac{a'}{c'} = 2{,}98$, pour les rapports des axes de l'ellipsoïde homogène correspondant, en calculant $h\sqrt{1+l^2}$ par approximations successives. Le petit axe est donc le $1/3$ du grand axe. L'aplatissement est le double de celui de la masse complètement concentrée, où c est deux fois plus grand, $c = \frac{2}{3}a$. L'aplatissement d'une masse hétérogène quelconque sera compris entre les deux.

Écrivons donc la seconde équation (15) au moment où se forme

l'anneau de la masse concentrée, et multiplions les deux termes par a, en désignant, dans le second membre, celui de la figure de Roche limite par a'_0,

$$(16) \qquad \frac{3}{2} h \sqrt{1 + l^2} = 1, \qquad \frac{3}{2} ah \sqrt{1 + l^2} = a'_0.$$

La masse homogène va continuer de se condenser, l'expression $ah\sqrt{1 + l^2}$ restant constante. Finalement, quand la masse prend la forme d'un disque aplati, l tend vers l'infini, avec $c = 0$, et $h\sqrt{1 + l^2}$ devient égal à $\frac{\pi}{2}$, d'après (1)'. Appelons a_0 le rayon limite du disque de la masse homogène, on aura

$$\frac{3}{2} \frac{\pi}{2} a_0 = a'_0, \qquad a_0 = \frac{4}{3\pi} a'_0 = 0,435\, a'_0.$$

Une masse homogène en rotation, qui se condense, aboutit donc finalement à un disque aplati, dont le rayon est un peu moins de la moitié de celui d'une masse hétérogène supposée très concentrée. Une masse hétérogène quelconque aboutira finalement à un disque intermédiaire.

Pour les faibles vitesses de rotation, on avait

$$(17) \qquad ah\sqrt{1 + l^2} = \frac{8}{15} ae = \frac{4}{15} a\varphi,$$

d'après ce que nous avons vu plus haut. Le premier membre reste constant, d'après (13) et devient égal à $\frac{\pi}{2} a_0$ à la limite du disque. On aura donc

$$a_0 = \frac{8}{15\pi} a\varphi, \qquad \frac{a}{a_0} = 680,$$

a et φ étant les valeurs actuelles du grand axe de la Terre supposée homogène.

A la limite de contraction, le rayon de la Terre homogène serait 680 fois plus petit, soit $9^{\text{km}},7$. La vitesse de rotation varierait en raison inverse de a^2. Elle serait 462 000 fois plus grande qu'actuellement. Le disque ferait 5,35 tours/sec.

Le rayon limite de la figure de Roche a'_0 serait égal à $22^{\text{km}},2$, et celui de la Terre hétérogène serait compris entre ce nombre et 9,7.

84. Comparaison des figures limites aux faibles vitesses et faibles aplatissements. Loi de la constance de la différence des axes. — — La quantité du premier membre de (17), proportionnelle au moment de rotation, reste constante dans la contraction d'un astre. Donc tant que e est assez faible pour qu'on puisse négliger e^2, la quantité ae ou $a - c$, est constante. *La différence du rayon équatorial et du rayon polaire reste constante*, au début de la contraction, dans une masse homogène.

Il en sera de même pour la figure de Roche, car (15) donnera en multipliant par a, et développant $\frac{a}{c}$,

$$(17)' \qquad ah\sqrt{1+l^2} = \frac{4}{3}\frac{a}{c}(a-c) = \frac{4}{3}(a-c)(1+e\ldots);$$

en négligeant e, on a encore $a - c$ sensiblement constant. D'après les valeurs de φ et a pour la Terre, on trouve $27^{km},7$ comme différence des rayons, si elle était homogène. En réalité la différence est de 21^{km}. Dans le cas d'une concentration totale, la comparaison de (17) et (17)' donne $10^{km},3$ pour la différence aux faibles vitesses. La valeur réelle est bien entre les deux limites.

A la limite de Roche ces différences seraient encore de $14^{km}.8$ pour la masse homogène, de $7^{km},4$ pour la masse concentrée et $11^{km},2$ pour la Terre, en admettant le même écart. La différence des axes aurait seulement diminué de moitié.

On peut admettre alors que le rapport des axes et des différences d'axes, reste le même pour une masse hétérogène quelconque et la masse homogène correspondante, on trouve alors que le rayon limite du disque serait de $12^{km},7$ pour la Terre. Il est remarquable que la différence des axes de la Terre ne varierait que de 8^{km}, au cours de son évolution, jusqu'à sa contraction théorique maximum du disque aplati, avec un rayon près de 200 fois plus petit. C'est *une loi des plus précises* de l'évolution de la figure de la Terre ou des planètes.

85. Masse hétérogène limitée entre deux ellipsoïdes homogènes. — Nous verrons, au chapitre suivant, que la vitesse de rotation d'une masse hétérogène, en équilibre relatif, reste toujours comprise entre celle de deux ellipsoïdes homogènes de densité D et ρ_0, den-

sité moyenne et densité centrale de la masse hétérogène. Cela revient à dire que cette vitesse est comprise entre les limites

$$(18) \qquad D h < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 h,$$

h étant donné par la formule $(1)'$.

En introduisant la masse, par la même formule que dans (12) on pourra écrire

$$(19) \qquad h\sqrt{1+l^2} < \frac{2}{3}\frac{\omega^2 a^3}{fm} < \frac{\rho_0}{D} h\sqrt{1+l^2}$$

ou encore

$$(20) \qquad \frac{3}{2}\frac{fm}{\omega^2} h\sqrt{1+l^2} < a^3 < \frac{\rho_0}{D}\frac{3}{2}\frac{fm}{\omega^2} h\sqrt{1+l^2},$$

en désignant par a_0 le grand axe de la même masse homogène, ayant la même vitesse de rotation, on aura, d'après (12),

$$(21) \qquad a_0^3 < a^3 < \frac{\rho_0}{D} a_0^3, \qquad a_0 < a < a_0\sqrt[3]{\frac{\rho_0}{D}}.$$

Le grand axe d'une masse hétérogène sera toujours compris entre ces deux limites. Pour la Terre $D = 5{,}5$ et $\rho_0 = 10$ environ, d'après la loi des densités de Roche. La dernière limite sera égale à $1{,}22\, a_0$. On aura donc la forme et les dimensions d'une masse hétérogène analogue, déterminées à un quart près. Le rayon du disque aplati limite serait compris entre 9,7 et 11^{km},9, limites très resserrées.

La formule (19) permet également de définir l'aplatissement de la masse hétérogène et sa variation entre deux limites. Comme $h\sqrt{1+l^2}$ varie toujours dans le même sens, en désignant par l' et h' les valeurs relatives à la masse hétérogène, on pourra écrire

$$(22) \qquad h\sqrt{1+l^2} < h'\sqrt{1+l'^2} < \frac{\rho_0}{D} h\sqrt{1+l^2},$$

ou encore, comme $h\sqrt{1+l^2}$ est toujours croissant avec l,

$$l < l' < \alpha l.$$

86. Développement des formules pour les figures très aplaties. — Nous avons vu au chapitre précédent (50) que la vitesse de rotation

pouvait s'exprimer par la formule

$$(23) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = P - \sigma R, \qquad \sigma = \frac{c^2}{a^2};$$

nous verrons au chapitre suivant, que l'on a, dans le cas des ellipsoïdes de révolution,

$$(24) \qquad P = \int_1^r \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\rho + \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctang} l - \frac{l}{1+l^2}\right)d\rho.$$

R est donné par une formule analogue, qui nous est inutile, car R étant multiplié par σ, ce terme sera au moins du second ordre et négligeable, dans le cas des figures très aplaties où c est très petit. On aura donc finalement une expression, où la force centrifuge $\omega^2 a$, sera partout égale à l'attraction $2\pi f P a$. Ce sera le cas limite du disque aplati. On fera le développement par rapport aux puissances de $\frac{c}{a}$, où c tend vers zéro. La formule de première approximation, en négligeant $\frac{c^2}{a^2}$, supposera donc cette égalité de la force centrifuge et de l'attraction.

On aura successivement

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}; \qquad l^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2 + u} = \lambda^2 \frac{c^2}{c^2 + u};$$

u est défini par (2) du chapitre précédent

$$\operatorname{arctang} l = \operatorname{arc\,cotang}\frac{1}{l} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang}\frac{1}{l} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{l}\cdots,$$

$$(25) \qquad P = \int_1^r \left(\frac{\pi}{2}\frac{c}{a} - 2\frac{c^2}{a^2}\right)d\rho + \int_r^0 \left(\frac{\pi}{2}\frac{c}{a} - 2\frac{c\sqrt{c^2+u}}{a^2}\right)d\rho.$$

En réunissant les deux premiers termes sous la même intégrale et négligeant $\frac{c^2}{a^2}$, on aura

$$(26) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\int_1^0 \frac{c}{a}\,d\rho - 2\int_\alpha^0 \frac{\sqrt{c^2+u}}{a}\,\frac{c}{a}\,d\rho.$$

Le premier terme du second membre est une constante, qui définit la vitesse de rotation ω_0 au centre.

87. Les figures redeviennent rigoureusement ellipsoïdales, pour les figures très aplaties et les grandes vitesses, comme pour les faibles vitesses. — La seconde intégrale de (26) dépend de la position du point considéré, par la limite α de l'intégrale et par le paramètre u défini par l'équation (2) du chapitre précédent. La valeur de α définit le rayon équatorial de la couche sur laquelle se trouve le point, et u dépend de ses coordonnées x, y, z. Cette seconde intégrale définit donc la vitesse de rotation en chaque point, pour que les surfaces de niveau soient rigoureusement ellipsoïdales et coïncident avec les surfaces d'égale densité, d'après les calculs du n° 86.

Calculons cette valeur de ω^2, sur l'axe de rotation. D'après la formule (2) du Chapitre VI, on aura sur cet axe $x = 0$ et $z^2 = c^2 + u$. La formule (26) devient

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\omega_0^2}{2\pi f} - 2z\int_\alpha^0 \frac{1}{a}\frac{c}{a}\,d\rho. \tag{27}$$

Or γ étant le petit axe de la surface, où se trouve le point considéré de vitesse ω, on a $z < \gamma$, et l'intégrale est un infiniment petit du second ordre en $\frac{\gamma}{a}\frac{c}{a}$ ou $\frac{c^2}{a^2}$, négligeable par hypothèse, dans la première approximation.

En première approximation, la vitesse de rotation ne dépend donc pas de la composante z suivant l'axe de rotation. On a donc alors $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$. C'est précisément la condition hydrodynamique nécessaire et suffisante pour que, dans le mouvement permanent les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité (n° 48). Les surfaces ellipsoïdales remplissent donc toutes les conditions pour être surfaces de niveau et d'équilibre, au voisinage de la figure du disque aplati, pour les grandes vitesses de ω et les grands aplatissements.

Clairaut, puis Laplace, avaient déjà établi que pour une masse hétérogène, tournant lentement, et voisine de la sphère, les surfaces de niveau, en première approximation, devaient être des ellipsoïdes légèrement aplatis. Ce sont encore des ellipsoïdes, mais très aplatis à l'autre bout de l'évolution. Dans l'intervalle la figure ne s'éloigne pas d'un centième de celle de l'ellipsoïde.

On pourra donc faire les calculs complets pour l'étude de la

figure de la masse hétérogène, au moyen des ellipsoïdes en partant des deux extrémités, la sphère et le disque aplati, et en les raccordant au milieu. Le point de raccord sera précisément la figure limite de Roche, où l'aplatissement e, en partant de la sphère, serait compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, comme on l'a vu au n° 81, alors que le rapport des axes $\frac{c}{a}$, pris comme paramètre, en partant du disque aplati, serait également compris entre les mêmes limites.

88. Variation de la vitesse de rotation du centre à la surface. — Il suffit donc de considérer cette variation sur l'équateur. On aura, avec $z = 0$

$$(28) \qquad \frac{x^2}{a^2+u} = 1, \qquad c^2 + u = x^2 - a^2 + c^2 = x^2 - a^2.$$

La dernière valeur est obtenue en négligeant c^2 devant a^2, c'est-à-dire un terme du second ordre. En remplaçant $d\rho$ par sa valeur en fonction de a, c'est-à-dire $\frac{\partial\rho}{\partial a}\,da$ ou $\rho'\,dx$, on aura

$$(29) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\omega_0^2}{2\pi f} - 2\int_a^0 \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\,\frac{c}{a}\,\rho'\,da.$$

La vitesse de rotation est bien uniquement fonction de la distance x à l'axe de rotation (formule du n° 48).

Le second terme est toujours négatif. La vitesse de rotation doit toujours être décroissante du centre à la surface, où elle sera minimum.

La formule (29) donnera donc la valeur finale de la vitesse de rotation des différentes couches, quand la masse sera réduite à un disque aplati. Elle sera encore vraie pour l'équilibre final, même si la masse continuait à tourner en bloc jusqu'au moment où la vitesse superficielle ω_1 permettrait à la première couche de rester en équilibre, en réalisant l'égalité de la force centrifuge et de l'attraction, égalité qui serait réalisée successivement par les autres couches dont la vitesse de rotation continuerait à augmenter par la contraction.

89. Application de la loi des densités de Roche. — Pour nous rendre compte pratiquement de la relation introduite par (29)

entre la vitesse de rotation ω et l'aplatissement défini par $\frac{c}{a}$, il faut introduire une loi de densités donnée, qui permette de pousser les calculs plus loin. La loi la plus simple est la loi de Roche

$$(30) \qquad \rho = \rho_0\left(1 - k\frac{a^2}{a_1^2}\right), \qquad d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial a}da = -2k\rho_0\frac{a}{a_1^2}da,$$

où ρ_0 est la densité centrale, $k < 1$ un coefficient constant, a_1 le rayon équatorial. Dans la première intégrale de (26) en $d\rho$, limite de 0 à 1, il faut avoir soin d'ajouter la constante relative à l'ellipsoïde de surface, méthode de M. Hamy (n° 65). On aura

$$(31) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1\rho_1 + \frac{\pi k\rho_0}{a_1^2}\int_0^1 c\,da - \frac{4k\rho_0}{a_1}\int_0^x \sqrt{x^2 - a^2}\,\frac{c}{a}\,da.$$

Prenons maintenant pour la variation $\frac{c}{a}$ des couches intérieures une formule analogue à celle de Roche, $\frac{c}{a}$ étant également croissant

$$(32) \qquad \frac{c}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)_0\left(1 - k'\frac{a^2}{a_1^2}\right), \qquad \left(\frac{c}{a}\right)_1 = \left(\frac{c}{a}\right)_0(1 - k').$$

La première intégrale, avec le terme constant, nous donnera la vitesse de rotation centrale

$$(33) \qquad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1\rho_0\left[1 + \frac{kk'}{2(1-k')}\right].$$

Intégrons de même le terme en z dans (27), on aura

$$(34) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\omega_0^2}{2\pi f} - \frac{4}{3}\,\frac{k\rho_0}{1-k'}\left(\frac{c}{a}\right)_1\left(1 - \frac{k'}{3}\,\frac{a^2}{a_1^2}\right)\frac{za}{a_1^2},$$

comme z est de l'ordre de c, le dernier terme est bien de l'ordre de $\left(\frac{c}{a}\right)_1^2$ et négligeable.

Pour intégrer la seconde intégrale de (31) on pose

$$\frac{a}{x} = \sin\theta, \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = x\cos\theta, \qquad da = x\cos\theta . d\theta.$$

L'intégrale devient

$$x^2\left(\frac{c}{a}\right)_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\left(1 - k'\frac{x^2}{a_1^2}\sin^2\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{4}x^2\left(\frac{c}{a}\right)_0\left(1 - \frac{k'}{4}\,\frac{x^2}{a_1^2}\right).$$

Finalement on aura pour la vitesse de rotation

$$(35)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1 \rho_0\left[1 + \frac{kk'}{2(1-k')} - \frac{k}{2(1-k')}\left(4 - k'\frac{x^2}{a_1^2}\right)\frac{x^2}{a_1^2}\right],$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1 \rho_0\left[1 - \frac{k}{2(1-k')}\left\{4\frac{x^2}{a_1^2} - k'\left(1 + \frac{x^4}{a_1^4}\right)\right\}\right].$$

A la surface, elle deviendra

$$(36)\quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1 \rho_0\left(1 - k\frac{2-k'}{1-k'}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{a}\right)_1 \rho_0(1 - \mathrm{K}).$$

Si les surfaces de niveau étaient homothétiques, on aurait $k' = 0$ et $1 - 2k$ pour la parenthèse. Il faudrait que le paramètre de la loi des densités soit $< \frac{1}{2}$. Pour la Terre il est voisin de $\frac{3}{4}$.

Pour que ω_1^2, soit positif, il faudra la condition entre les deux paramètres des densités et des aplatissements $k' < \frac{1-2k}{1-k} < 1$.

90. Introduction de la masse dans les formules. — En désignant par D la densité moyenne de la masse hétérogène, on pourra écrire

$$(37)\quad m = \frac{4}{3}\pi a_1^2 c_1 \mathrm{D} = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \left(\frac{c}{a}\right)_1 \mathrm{D}.$$

En portant cette valeur dans (36) on aura

$$(38)\quad \omega_1^2 = \frac{3\pi}{4}\frac{fm}{a_1^3}\frac{\rho_0}{\mathrm{D}}\left(1 - k\frac{2-k'}{1-k'}\right).$$

Or d'après (20), et la valeur limite de $h\sqrt{1+l^2} = \frac{\pi}{2}$, on aurait, pour le rayon limite a_0 d'une masse homogène m ayant la même vitesse de rotation ω_1, que notre masse hétérogène

$$(39)\quad a_0^3 = \frac{3\pi}{4}\frac{fm}{\omega_1^2}.$$

Et la formule (38) nous donnerait le rayon limite a_1 du disque hétérogène, ayant cette limite de rotation ω_1,

$$(40)\quad a_1^3 = a_0^3\frac{\rho_0}{\mathrm{D}}\left(1 - k\frac{2-k'}{1-k'}\right)$$

cette formule nous donne bien une valeur comprise entre les deux

limites indiquées par (21), la parenthèse étant plus petite que 1. Le rayon limite du disque que deviendrait la Terre à son maximum de concentration se réduirait à une longueur très voisine de 10^{km}.

Remarque. — Ce sont là évidemment des vues purement théoriques, car on arriverait avec de pareilles condensations à des *densités énormes*. Cependant des astronomes et des professeurs d'astronomie des plus illustres, pour justifier certaines hypothèses, n'ont pas craint d'attribuer de pareilles densités à certaines étoiles, comme le compagnon de Sirius. Ces densités aux chiffres vraiment « astronomiques » ont d'ailleurs été « légitimées » par de savants calculs théoriques, mais très hypothétiques, et « vérifiées » même par des observations ultra-délicates et fortement discutées. Il était intéressant de les envisager aussi pour la Terre.

CHAPITRE VIII.

ELLIPSOÏDES DE RÉVOLUTION HOMOFOCAUX ET HOMOTHÉTIQUES. LIMITATION D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE PAR DEUX ELLIPSOÏDES HOMOGÈNES.

---

91. **Objet du Chapitre et résultats.** — M. Hamy, après avoir démontré dans sa thèse qu'une masse hétérogène, en équilibre relatif, ne pouvait pas prendre une forme rigoureusement ellipsoïdale, avait pensé qu'elle le pouvait dans le cas d'un mouvement permanent, avec vitesses de rotation variable. Il avait alors fait l'étude d'une masse hétérogène dans l'hypothèse où les surfaces de niveau seraient homofocales.

Après avoir repris et étendu la démonstration de M. Hamy, j'avais fait également l'étude d'une masse hétérogène, avec surfaces de niveau homothétiques, relié les vitesses aux aplatissements, et montré que la figure, non ellipsoïdale, de la masse hétérogène restait comprise entre deux ellipsoïdes homogènes.

Cependant la démonstration de M. Hamy, sur l'impossibilité des surfaces ellipsoïdales, ayant été étendue au mouvement permanent, où les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité, comme on l'a vu n° 78, ces démonstrations ne présentaient plus la même rigueur.

Ces questions des ellipsoïdes homofocaux et homothétiques, qui ne formaient qu'un chapitre secondaire des thèses de M. Hamy et Véronnet, ont été reprises comme sujet principal de sa thèse par M. Dive, qui a utilisé les travaux et formules de M. Wavre. Ils ont considéré tous deux le second cas du mouvement permanent, celui où l'accélération ne dérive pas d'une fonction, et où les surfaces de niveau ne coïncident pas avec les surfaces d'égale densité. Mais pour rendre le calcul possible, ils ont admis qu'à la superficie du moins, la surface de niveau était aussi une surface d'égale densité. Nous avons vu, n° 78, que dans ce cas, toutes les

surfaces de niveau et d'égale densité coïncident. On retombe sur le cas précédent et naturellement M. Dive ne fait que retrouver les résultats de MM. Hamy et Véronnet pour les surfaces homofocales et homothétiques.

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que, dans l'équilibre relatif, les surfaces de niveau d'une masse hétérogène restaient sensiblement ellipsoïdales, et même rigoureusement ellipsoïdales, à la limite d'aplatissement, dans le mouvement permanent avec vitesses variables. On peut alors conserver ces calculs et leurs résultats, sur les surfaces de niveau homofocales et homothétiques à titre d'indication et de première approximation, déjà très approchée, à moins du dixième pour la forme.

On verra de même comment, en étendant la discussion au cas du moment de rotation constant dans la contraction comme au cas où la densité resterait constante, on peut étendre à la masse hétérogène tous les résultats établis pour une masse homogène, dans le premier fascicule de cet Ouvrage, n° 23 *bis*.

92. Formules de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point extérieur. — Nous pourrions partir des formules établies au Chapitre VI et les intégrer. Il est préférable de partir directement des formules relatives aux ellipsoïdes homogènes. Dans le premier fascicule de ce volume nous n'avons traité que le cas du point intérieur à un ellipsoïde homogène. Il faut ici étendre les formules au cas du point extérieur.

Nous avons vu au Chapitre VI l'expression du potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point x, y, z extérieur (1) ou intérieur (3). On en a déduit l'expression des composantes de la force X, Y, Z dans les deux cas (5) et (6). Nous remplacerons ici la variable λ par ξ pour éviter des confusions, on a, pour l'action des couches intérieures à celle du point considéré, pour lesquelles ce point est *extérieur*

$$(1)\qquad P_e = -\frac{X}{x} = 2\pi f abc\rho \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

La limite u étant toujours la racine positive de l'équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1,\qquad \varphi(\xi)=(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi).$$

Pour un point intérieur on a la même expression où u est remplacé par o, comme limite de l'intégrale. Pour les autres composantes de la force on remplace a par b ou c dans l'intégrale.

Pour les ellipsoïdes de révolution on fait $b = a$, on a $Q = P$, les deux composantes seront d'après (2)

$$(3)\qquad \frac{P_e}{2\pi f\rho} = a^2 c\int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)^2\sqrt{c^2+\xi}} = 2a^2c\int_t^\infty \frac{dt}{(t^2+k^2)^2},$$

$$(4)\qquad \frac{R_e}{2\pi f\rho} = a^2 c\int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)(c^2+\xi)^{\frac{3}{2}}} = 2a^2c\int_t^\infty \frac{dt}{t^2(t^2+k^2)}.$$

La forme en t, rendue rationnelle, est obtenue en posant

$$(5)\qquad c^2+\xi = t^2, \qquad a^2+\xi = t^2+a^2-c^2 = t^2+k^2.$$

On a immédiatement pour la deuxième intégrale, dans (4)

$$(6)\qquad -\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{k}\right)_t^\infty = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{k}{t}\right),$$

en tenant compte de ce que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{t}{k} = -\operatorname{arc\,tang}\frac{k}{t}.$$

Nous posons encore

$$(7)\qquad l^2 = \frac{a^2-c^2}{c^2+u} = \frac{c^2}{c^2+u}\lambda^2,$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2-c^2}{c^2}, \qquad k^2 = c^2\lambda^2, \qquad 1+\lambda^2 = \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{s},$$

expressions qui définissent l et λ. Dans le cas du point extérieur, nous devons faire, pour la limite inférieure de l'intégrale

$$\xi = u, \qquad t = \sqrt{c^2+u} = \frac{k}{l}.$$

La parenthèse du second membre de (6) devient $\frac{1}{k^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l)$. On obtient encore

$$(8)\qquad a^2c = c^3(1+\lambda^2), \qquad k^3 = c^3\lambda^3, \qquad \frac{a^2c}{k^3} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}.$$

L'expression (4) devient finalement, pour un point extérieur,

$$(9)\qquad \frac{R_e}{4\pi f\rho} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l).$$

Pour un point intérieur on a $u=0$, c'est-à-dire $l=\lambda$, ce qui donne pour R_i la même formule, où l est remplacé par λ. C'est la formule obtenue dans la première partie pour les homogènes.

Pour résoudre l'intégrale (3), considérons l'expression suivante intégrée par parties

$$\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{t}{t^2+k^2} + \int \frac{2t^2\,dt}{(t^2+k^2)^2} = \frac{t}{t^2+k^2} + \int \frac{2\,dt}{t^2+k^2} - \int \frac{2k^2\,dt}{(t^2+k^2)^2}.$$

La dernière intégrale est celle que nous cherchons. Les deux autres se retranchent et donnent arc tang $\frac{t}{k}$. En prenant les limites, et inversant arc tang comme ci-dessus (6), on a

$$2k^2\int_t^\infty \frac{dt}{(t^2+k^2)^2} = \frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\frac{k}{t} - \frac{t}{t^2+k^2}.$$

En introduisant l et λ il vient

$$t^2+k^2 = \frac{k^2(1+l^2)}{l^2}, \qquad \frac{t}{t^2+k^2} = \frac{1}{k}\,\frac{l}{1+l^2}.$$

D'où, pour un point extérieur,

$$(10)\qquad \frac{P_e}{2\pi f\rho} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,l - \frac{l}{1+l^2}\right).$$

Pour un point intérieur, on fait $l=\lambda$, et l'on retrouve l'expression connue pour les ellipsoïdes homogènes de révolution.

93. Formules de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un de ses points. — L'action d'une couche ellipsoïdale élémentaire de densité ρ s'obtient en différentiant ces expressions, l et λ étant fonctions de a et c, le petit axe, l'axe de rotation, l'axe des z, étant c

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{dP_e}{2\pi f\rho} &= d\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,l - \frac{l}{1+l^2}\right),\\ \frac{dP_i}{2\pi f\rho} &= d\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right), \end{aligned}$$

et les expressions analogues pour R_e et R_i.

Pour avoir l'action totale on intégrera pour toutes les couches

de densité ρ, du centre à la couche sur laquelle est situé le point x, y, z, de rayon vecteur r. Le point est extérieur à ces couches et il faudra prendre les dP_e et dR_e. Puis on intégrera de r à la surface extérieure, rayon vecteur r_1, et l'on prendra alors dP_i et dR_i. On aura finalement

$$(12) \qquad \frac{P}{2\pi f} = \int_0^r \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\, l - \frac{l}{1+l^2}\right) + \int_r^{r_1} \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$(13) \qquad \frac{R}{4\pi f} = \int_0^r \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \text{arc tang}\, l) + \int_r^{r_1} \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda).$$

Dans la méthode de M. Hamy, Chapitre VI, n° 63, on considère l'action d'ellipsoïdes pleins, de densité $d\rho$. On commence par l'ellipsoïde extérieur de densité ρ_1 d'éléments a_1 et c_1, puis par les ellipsoïdes, emboîtés jusqu'en r, avec les P_i et R_i, enfin on intègre de r au centre, en prenant les P_e et R_e

$$(14) \qquad \frac{P}{2\pi f} = \int_{r_1}^r \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\rho + \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\, l - \frac{l}{1+l^2}\right) d\rho,$$

$$(15) \qquad \frac{R}{4\pi f} = \int_{r_1}^r \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda)\, d\rho + \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \text{arc tang}\, l)\, d\rho.$$

L'ellipsoïde superficiel de densité ρ_1 est compris dans la première intégrale, pour ne pas compliquer l'écriture. Il donnerait un terme égal à

$$\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1^2}\right)\rho_1 \quad \text{et} \quad \frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}(\lambda_1 - \text{arc tang}\,\lambda_1)\rho_1.$$

Remarque. — En intégrant par parties les formules de la première méthode (12) et (13) on obtiendra ces dernières (14) et (15). En effet les intégrales seraient bien celles de (14) et (15). De plus, pour les termes tout intégrés, on a, pour la première formule (12) par exemple

$$\left|\rho\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)\right|_0^r + \left|\rho\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right|_r^{r_1},$$

qui se réduit au terme relatif à la limite r_1. En effet au centre, limite o, on a $a=c=0$ et $l=0$ d'après (7), car $c^2+u\neq 0$ d'après (2). Le premier terme est nul pour la limite o. Pour la limite commune r on a $l=\lambda$, car les deux valeurs se confondent et les deux termes se détruisent. Il reste seulement le terme en r_1, que nous convenons d'inclure dans la première intégrale.

94. Formules de la vitesse de rotation en un point. — La condition que la force soit normale aux surfaces de niveau n° 36 se réduit ici à une seule équation

$$(16)\qquad (X+\omega^2 x)\frac{a^2}{x}=Z\frac{c^2}{z},\qquad \omega^2=-\frac{X}{x}+\frac{c^2}{a^2}\frac{Z}{z}=P-\frac{R}{1+\lambda_r^2},$$

λ_r^2 étant la valeur de λ sur la couche relative au point x, y, z, rayon vecteur r. Le terme $\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}$ est commun dans les intégrales de P et R dans (14) et (15). En écrivant le second membre de ω^2, la somme des termes de la parenthèse en l des secondes intégrales de P et R donne

$$(17)\qquad \left(\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}\right)-\frac{2}{1+\lambda_r^2}(l-\operatorname{arc\,tang} l)$$
$$=\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}-\frac{2l}{1+\lambda_r^2}.$$

On remplacera l par λ dans (17) pour avoir le terme correspondant aux premières intégrales, prises de r_1 ou 1 à r. On a finalement

$$(18)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f}=\int_1^r\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}-\frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right)d\rho$$
$$+\int_r^0\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}-\frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right)d\rho,$$

ou, sous la forme classique,

$$(19)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f}=\int_0^r\rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}-\frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right)$$
$$+\int_r^1\rho\, d\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}-\frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right).$$

On retrouve l'expression des ellipsoïdes homogènes en faisant

$d\rho = 0$ dans (18). Tous les éléments d'intégration s'annulent avec $d\rho$. Il reste seulement l'élément superficiel dans la première intégrale.

Remarque. — Sur l'axe de rotation, ou sur le rayon polaire, $x = y = 0$, on a, d'après la relation qui donne u,

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \qquad z^2 = r^2 = c^2 + u; \tag{20}$$

d'où

$$l^2 = \frac{c^2}{c^2+u}\lambda^2 = \frac{c^2}{r^2}\lambda^2, \qquad l = \frac{c}{r}\lambda. \tag{21}$$

Pour plus de simplicité on pourra prendre le point x, z sur l'axe de rotation.

D'ailleurs, même quand le point x, z sera quelconque, nous prendrons toujours pour limite d'intégration r, qui désignera le petit axe de l'ellipsoïde du point, petit axe en fonction duquel on peut toujours supposer que la densité ρ et tous les autres éléments de la couche sont exprimés.

95. La force centrifuge ne peut jamais égaler l'attraction. Impossibilité d'un fractionnement. — Le rapport de la force centrifuge à l'attraction, en un point quelconque x, z, s'obtient en négligeant la composante parallèle à l'axe de rotation, et est égal à

$$\varphi = \frac{\omega^2 x}{X} = \frac{\omega^2}{P}. \tag{22}$$

Or on a, d'après (16),

$$P - \omega^2 = \frac{R}{1+\lambda_r^2}, \tag{23}$$

et R est positif, car dans (15) on a $\lambda > \text{arc tang}\,\lambda$ et $l > \text{arc tang}\, l$, et tous les éléments d'intégration sont positifs. On a donc toujours $P > \omega^2$ et $\varphi < 1$. D'où le théorème :

L'attraction est toujours supérieure à la force centrifuge, à l'intérieur comme à la surface d'une masse fluide hétérogène, dont les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution, quelles que soient la répartition des densités et la vitesse de rotation.

Les formules s'appliquent aussi bien à une variation brusque de la densité, le $d\rho$ étant alors un accroissement fini. Le théorème

s'applique donc à toute la masse d'une planète, y compris son atmosphère. Si des éléments équatoriaux se sont détachés (anneaux de Saturne, anneaux de Laplace) il fallait que leur vitesse de rotation fût plus grande que celle qui est compatible avec les conditions de l'équilibre hydrodynamique.

Si les surfaces de niveau sont homofocales, on a au centre $P = \omega^2$ et $\varphi = 1$. La force centrifuge égale l'attraction seulement au centre et non à la surface. Dans les autres cas que les surfaces homofocales, les deux forces sont également nulles au centre.

Dans un ellipsoïde homogène, φ est indépendant de ρ et tend vers 1, quand λ tend vers l'infini (disque aplati)

$$(23)\qquad \varphi = \frac{\omega^2 x}{X} = \frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda}{(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda}$$

$$= 1 - \frac{2(\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda)}{(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda} \leqq 1;$$

car les deux termes de la dernière fraction sont positifs et l'expression est bien < 1. On aurait $\varphi = 1$ et la force centrifuge serait égale à l'attraction seulement pour $\lambda = \infty$, c'est-à-dire $c = 0$, quand l'ellipsoïde indéfiniment aplati tendrait à la limite vers la forme d'un disque.

De même pour la masse hétérogène, à la limite du disque aplati, tous les λ_r seraient infinis. On aurait pour tous les points $\frac{R}{1+\lambda_r^2} = 0$ et $P = \omega^2$. La force centrifuge serait égale à l'attraction en tout point, mais seulement à cette limite. Elle ne serait jamais supérieure et il ne pourrait pas y avoir fractionnement, ni tendance au fractionnement, pour les figures ellipsoïdales.

96. Cas des surfaces sphériques. Elles sont possibles seulement si la vitesse de rotation est nulle. — Si une surface de niveau quelconque était sphérique, on aurait $a = c$ et $\lambda_r = 0$ sur cette surface. Considérons la valeur de ω^2 pour un point quelconque de cette surface. On aura, d'après (18),

$$(24)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_1^r \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - 2\lambda\right)d\rho$$

$$+ \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - 2l\right)d\rho.$$

Or l'expression en λ est nulle pour $\lambda = 0$ et sa dérivée

$$\frac{3}{1+\lambda^2} - \frac{1}{1+\lambda^2} + \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} - 2 = -\frac{2\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}$$

est toujours négative. Cette expression en λ est donc toujours négative si $\lambda \neq 0$. Il en est de même de l'expression en l. On ne peut donc pas avoir $\lambda \neq 0$ pour aucune surface, autrement on aurait $\omega^2 < 0$. On a donc partout dans ce cas $\lambda = 0$ et aussi $\omega^2 = 0$, d'où le théorème :

Dans une masse fluide hétérogène en équilibre, aucune surface de niveau, en particulier la surface extérieure, ne peut être sphérique, que si la vitesse de rotation est nulle sur toutes les surfaces de niveau, qui sont alors toutes sphériques.

97. **Variation de la vitesse de rotation sur une surface de niveau.** — L'équation de l'ellipse méridienne du point considéré peut s'écrire

$$(25) \qquad \frac{x^2}{a_r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{1+\lambda_r^2} + z^2 = r^2,$$

où a_r est le grand axe de l'ellipse considérée, dont le petit axe est r, et en introduisant

$$\lambda_r^2 = \frac{a_r^2 - r^2}{r^2}, \qquad 1 + \lambda_r^2 = \frac{a_r^2}{r^2}.$$

De même l'équation qui définit u, en tenant compte des expressions (21) pour remplacer u par l, s'écrira

$$(26) \qquad \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \qquad \frac{x^2}{1+l^2} + z^2 = \frac{\lambda^2}{l^2} c^2.$$

L'élimination de x^2 entre ces deux expressions nous donne

$$(27) \qquad \frac{z^2}{r^2} l^4 + \left(1 + \lambda_r^2 - \frac{z^2}{r^2}\lambda_r^2 - \frac{c^2}{r^2}\lambda^2\right) l^2 - \frac{c^2}{r^2}\lambda^2 = 0.$$

Sur la surface r et λ_r sont constants, λ et c sont les éléments d'une couche quelconque, qui ne varient pas non plus. En différentiant par rapport à l et z, on a

$$(28) \qquad \frac{dl}{dz^2} = \frac{l^3}{2} \frac{\lambda_r^2 - l^2}{c^2\lambda^2 + z^2 l^2}.$$

On en déduira les formules de la variation de la vitesse de ... tion en latitude et en profondeur, pour les ellipsoïdes de révolution comme aux nos 74, 75. On en tirera les mêmes conclusions, no 77, sur les variations des aplatissements. *Voir* rotation d'une masse hétérogène, *Journal de Math. pures et appl.*, 1912.

Désignons par β la parenthèse de la deuxième intégrale de ω^2 (18). On peut l'écrire sous la forme suivante qui, dérivée par rapport à l, donne (29)

$$\beta = \frac{l^3}{1+l^2} - \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}(l - \text{arc tang}\, l),$$

(29) $$\frac{d\beta}{dl} = \frac{2l^2}{(1+l^2)^2}\,\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+\lambda_r^2}.$$

Il faut prendre maintenant la dérivée de ω^2 par rapport à z^2, variable sur la surface. Or ω^2 est fonction de z^2 seulement par l'intermédiaire de l, contenu dans la parenthèse désignée par β. On a directement de (18)

$$\frac{1}{2\pi f}\,\frac{d\omega^2}{dz^2} = \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,\frac{d\beta}{dl}\,\frac{\partial l}{\partial z^2}\,d\rho.$$

$\frac{\partial l}{\partial z^2}$ correspond à $\frac{\partial u}{\partial z^2}$ du chapitre précédent, no 73, car ici u a été remplacé par l. En remplaçant les dérivées par leurs valeurs (28) et (29) on obtient

(30) $$d\omega^2 = 4\pi f z\, dz \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{l^5}{\lambda^5}\left(\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+l^2}\right)^2 \frac{d\rho}{c^2+z^2},$$

c'est la formule (63), no 73. Les éléments d'intégration sont tous positifs. Donc ω croît avec z. La vitesse de rotation, sur une surface de niveau, doit croître de l'équateur au pôle, pour que les surfaces soient ellipsoïdales.

La variation de la vitesse de rotation serait nulle sur les surfaces de niveau, seulement si l'on avait partout $l = \lambda_r$, c'est-à-dire si toutes les surfaces de niveau étaient homofocales, résultat déjà trouvé au sixième chapitre.

On voit dans (30) que $d\omega^2$ dépend de λ^4. L'expression est donc nulle, ou négligeable, en *première approximation*. On pourra donc également, dans ce cas, avoir des surfaces ellipsoïdales, avec variation de la vitesse de rotation d'une couche à l'autre, sans variation de vitesse sur une couche donnée. La condition hydro-

dynamique $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ se trouve satisfaite, en première approximation, cela signifie d'après le n° 48 que les surfaces de niveau et d'égale densité coïncident sensiblement à e^2 près.

98. **Hypothèse de l'équilibre contraint ou équilibre mécanique.** — La condition d'équilibre hydrodynamique $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ n'est pas réalisée par les ellipsoïdes homothétiques, ni sur les ellipsoïdes homofocaux. Cependant l'étude du cas où les surfaces d'égale densité sont des ellipsoïdes semblables, ou des ellipsoïdes homofocaux, présente un grand intérêt et l'avantage d'une plus grande facilité.

En effet elle permet de faire la discussion de l'évolution des surfaces avec la variation de la vitesse de rotation, ou celle du moment de rotation. Elle permet ainsi d'étendre aux ellipsoïdes hétérogènes les résultats trouvés dans la première partie pour les ellipsoïdes homogènes. De plus ces résultats permettent d'encadrer ceux que l'on obtiendrait avec des ellipsoïdes, qui vérifieraient la condition ci-dessus, par conséquent ils permettent d'étudier l'évolution réelle des figures d'équilibre d'une masse hétérogène, avec la variation de la vitesse ou du moment de rotation, et de résoudre le problème presque aussi complètement que pour les ellipsoïdes homogènes.

Cependant si les ellipsoïdes homothétiques ou homofocaux ne réalisent pas d'eux-mêmes et librement les conditions de l'équilibre hydrodynamique, nous pouvons toujours supposer qu'elles ont été réalisées artificiellement en ajoutant sur chaque parallèle des pressions supplémentaires qui rétablissent l'équilibre, qui maintiennent à chaque instant un *équilibre contraint* au moins à la surface libre. Nous pourrons alors étudier l'évolution des figures avec la vitesse de rotation et l'appliquer au cas de l'équilibre vrai, encadré par les résultats précédents.

En somme nous admettons que la résultante des forces externes, attraction et force centrifuge, est encore normale aux surfaces d'égale densité. Il y a un équilibre mécanique, qui tend à conserver la forme des surfaces. Mais la résultante des pressions internes ne serait plus normale à ces surfaces, ne serait plus directement opposée à la résultante précédente. Les surfaces d'égale pression ne coïncideraient plus avec celles d'égale densité. Ce sont les pres-

sions supplémentaires introduites qui rétablissent la coïncidence et l'équilibre. A aucun moment elles ne gênent l'équilibre purement mécanique, ni par conséquent l'évolution des formes, avec la variation de la vitesse de rotation et de la résultante des attractions.

D'ailleurs on a vu que les surfaces restaient sensiblement ellipsoïdales, et l'on aura toujours une première approximation déjà très suffisante.

99. **Cas particulier des ellipsoïdes homothétiques. La vitesse au centre varie comme celle d'un ellipsoïde homogène.** — Si toutes les surfaces sont homothétiques on a $\lambda = \lambda_r$. C'est une constante que l'on peut faire sortir des intégrales. On peut remplacer de même partout λ_r par λ pour simplifier. Dans (18) la somme de 1 à r, où l'élément d'intégration est en λ, indépendant de r, s'intègre immédiatement et donne ρ. Il vient

$$(31)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \rho\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) + \int_r^0 \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{\lambda^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}\right)d\rho.$$

Au centre $r = 0$, l'intégrale est nulle. On a, en désignant par l'indice 0 la valeur des éléments au centre

$$(31')\qquad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \rho_0\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = \rho_0 h_0.$$

La parenthèse, ou h, n'est pas autre chose que l'expression trouvée dans le cas d'une densité constante. Ainsi dans le cas où les couches sont des ellipsoïdes semblables, la vitesse de rotation au centre est reliée à la densité centrale ρ_0 et à l'aplatissement central défini par λ, par la même relation que pour les ellipsoïdes homogènes ; d'où le théorème :

L'aplatissement d'un ellipsoïde hétérogène à surfaces de niveau homothétiques varie de la même façon que celle d'un ellipsoïde homogène, qui aurait la même densité centrale ρ_0 et la même vitesse de rotation ω_0 que celle du centre.

Nous aurons alors la même discussion que pour les ellipsoïdes de Maclaurin, *voir* fasc. I, Chap. III.

Quand λ varie de 0 à l'infini la valeur de h croît d'abord de 0 à 0,224, valeur maximum atteinte pour $\lambda = 2,53$, puis h décroît jusqu'à zéro. Il y a donc une vitesse de rotation maximum $\omega_0^2 = 0,224 \times 2\pi f \rho_0$ qui ne peut pas être dépassée, et au-dessous de laquelle il y a deux valeurs de ω_0, et deux figures d'aplatissement différent, qui correspondent à la même vitesse de rotation centrale ω.

Nous pourrons également prendre le moment de rotation, somme des moments des quantités de mouvement, comme paramètre, comme dans le premier fascicule de ce volume, n° 23. Dans les ellipsoïdes homogènes nous avions considéré le moment de rotation total μ. Ce moment a dû rester invariable pour un astre isolé. Si nous négligeons le frottement, il en est de même pour le moment de rotation de chaque couche prise isolément. Alors si nous considérons la portion centrale de masse M, qui est régie par les mêmes formules que les ellipsoïdes homogènes, on obtiendra, comme pour ceux-ci

$$(32) \qquad k = 4h(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}, \qquad k = \frac{50\mu^2}{3fM^2}\left(\frac{4\pi\rho_0}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette formule donne la variation de λ, c'est-à-dire de l'aplatissement, en fonction de la variation de la densité centrale ρ_0, en supposant que la masse se contracte, μ et M restant constants. La discussion montre que λ croît indéfiniment avec ρ. La masse s'aplatit indéfiniment en se contractant indéfiniment.

En introduisant le grand axe a de notre masse centrale élémentaire M, au lieu de la densité ρ, on trouve (fasc. I, n° 23 *bis*)

$$(32)' \qquad g = \frac{50}{3fM^3}\,\frac{\mu^2}{a} = 4h\sqrt{1+\lambda^2}, \qquad a_0 = \frac{25}{3fM^3}\,\frac{\mu^2}{\pi}.$$

Cette formule donne la variation du grand axe a quand λ ou l'aplatissement varie. Ce grand axe tend vers une limite finie a_0, quand l'aplatissement croît indéfiniment et quand la masse considérée tend vers la forme d'un disque aplati.

100. Cas particulier des ellipsoïdes homofocaux. La vitesse à la surface varie comme celle d'un ellipsoïde homogène. — Si les surfaces sont homofocales, la différence des carrés des axes est constante. En désignant par l'indice 1 les éléments de surface,

on a

$$a^2 - c^2 = a_1^2 - c_1^2, \qquad a^2 = c^2(1 + \lambda^2), \qquad \lambda c = \lambda_1 c_1 = \text{const}.$$

Faisons dans (27) $\lambda c = r\lambda_r$, il vient

$$\left(\frac{z^2}{r^2} l^2 + 1\right)(l^2 - \lambda_r^2) = 0, \qquad l = \lambda_r.$$

On peut remplacer tous les l par λ_r constant et les faire sortir du signe somme. La formule (18) devient

$$(33) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_1^r \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right)d\rho$$
$$+ \left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{3\lambda_r}{1+\lambda_r^2}\right)\int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,d\rho.$$

Désignons par V le volume de l'ellipsoïde d'axes a et c, relatif à l'élément d'intégration $d\rho$, et par V_r celui de l'ellipsoïde du point x, z, défini par son petit axe r, on a

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c = \frac{4}{3}\pi c^3(1+\lambda^2), \qquad \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{V}{V_r}\,\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}.$$

Portons cette valeur dans ω^2. On peut faire sortir les λ_r de la seconde intégrale et il vient

$$(34) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_1^r \left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3}\,\frac{1+\lambda_r^2}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3}\right)\frac{V}{V_r}\,d\rho$$
$$+ \left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{3}{\lambda_r^2}\right)\int_r^0 \frac{V}{V_r}\,d\rho.$$

$V\,d\rho = dm$ est la masse élémentaire contenue dans l'ellipsoïde de volume V, d'après la méthode de M. Hamy.

Pour obtenir la vitesse de rotation à la surface, on fait $r = 1$. La parenthèse de la première intégrale devient la même que la seconde. Les intégrales n'en font plus qu'une et donnent D_1 densité moyenne de l'ensemble, en faisant $V_r = V_1$. On obtient

$$(35) \quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}\right)D_1 = D_1 h_1.$$

h est la même expression que celle du numéro précédent et que pour les ellipsoïdes homogènes; d'où le théorème :

L'aplatissement superficiel d'un ellipsoïde hétérogène à surfaces homofocales varie de la même façon que celle d'un ellipsoïde homogène qui aurait la même densité moyenne D_1.

101. Discussion dans le cas où les densités ne varient pas. La variation générale de la vitesse de rotation est la même que pour les ellipsoïdes homogènes. — Nous devons supposer, pour réaliser les conditions hydrodynamiques, que la vitesse de rotation est constante ou fonction uniquement de la distance à l'axe de rotation. Elle doit rester la même sur l'axe polaire, et sur toute surface cylindrique autour de cet axe. Nous calculerons la vitesse de rotation en deux points de l'axe polaire, au centre et au pôle même, où les formules se simplifient. Nous supposerons que la vitesse de rotation y est la même et nous comparerons les résultats avec ce que nous savons des ellipsoïdes homothétiques et homofocaux.

A la *surface* la formule générale (18) qui donne ω^2 devient

$$(36) \qquad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_1^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_1^2}\right)d\rho.$$

Si $\lambda_1 = 0$, on a $l = \lambda = \lambda_1 = 0$, car ici $\lambda \leq \lambda_1$ et alors on a $\omega_1 = 0$.

Si $\lambda_1 = \infty$ tous les λ sont infinis, car la figure se réduit à un disque aplati, et l'on a encore $\omega_1 = 0$ d'après (36).

La vitesse est donc nulle pour λ nul ou infini. Elle aura un maximum dans l'intervalle, comme dans le cas d'un fluide homogène où le maximum de ω a lieu pour $\lambda = 2{,}53$.

Nous avons ici une démonstration générale, relative à l'équilibre hydrodynamique, du fait que la vitesse de rotation superficielle doit varier comme dans les ellipsoïdes homogènes, entre un maximum et la valeur zéro. Cette démonstration est valable pour tous les points de la surface, qui atteignent en même temps leurs valeurs limites, zéro ou le maximum.

La formule (18) donne de même au *centre*

$$(37) \qquad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \int_1^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\operatorname{arctang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_0^2}\right)d\rho.$$

Si $\lambda_0 = 0$, les surfaces centrales sont sphériques. Comme on a vu au n° 96, il faut que l'on ait partout $\lambda = 0$ et aussi $\omega^2 = 0$.

Si $\lambda_0 = \infty$, tous les λ sont infinis, car les aplatissements et les λ croissent du centre à la surface, et l'on a encore $\omega^2 = 0$.

On a donc au centre la même variation de la vitesse de rotation par rapport à λ_0 qu'à la surface et que pour les ellipsoïdes homogènes. Il en sera de même naturellement pour toutes les couches intermédiaires.

Pour une masse hétérogène ellipsoïdale, comme pour une masse homogène, de densité donnée, il y a donc deux figures d'équilibre limite, qui sont de révolution et où la vitesse de rotation est nulle partout : la sphère, où toutes les surfaces ont un aplatissement nul, $\lambda = 0$, et le disque plan, indéfiniment aplati, où les λ sont tous infinis. Dans le passage de l'une à l'autre figure limite, la vitesse de rotation passe toujours par un maximum, comme pour un ellipsoïde homogène, courbe 3 et 3′, figure 3, n° **103**. Nous allons fixer des limites à ce maximum et à la variation de cette vitesse de rotation.

102. Comparaison de la vitesse de rotation avec celle des ellipsoïdes homothétiques et homofocaux. — En introduisant l'expression z, qui devient égale à h pour $\lambda = l$, la vitesse de rotation à la surface, dans (36), devient

$$(38)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_1^0 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,\frac{\lambda_1^3}{1+\lambda_1^2}\,z\,d\rho,$$

$$z = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{\lambda^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}.$$

Au pôle on aura $l = \frac{c\lambda}{r}$, d'où en tenant compte de la valeur de V définie au n° 100,

$$(39)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_1^0 \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\,\frac{c^3}{r_1^3}\,\frac{\lambda_1^3}{l^3}\,z\,d\rho = \int_1^0 \frac{V}{V_1}\,\frac{\lambda_1^3}{l^3}\,z\,d\rho.$$

Or le facteur $\frac{V}{V_1}$ reste constant pour chaque surface quand λ varie. Si λ_1 reste le même, la valeur de l'élément d'intégration varie seulement avec $\frac{z}{l^3}$ quand les λ intérieurs varient, c'est-à-dire quand on passe de l'un des cas étudiés à l'autre. Or on a

$$\frac{d}{dl}\,\frac{z}{l^3} = \frac{1}{l^4}\left[\frac{2l^3(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3(1+l^2)^2} - 3z\right].$$

En désignant la parenthèse par φ, on a pour $l = 0$, $z = 0$, $\varphi = 0$ et pour $l = \lambda_1$, $\varphi = -3h$. On obtient ensuite

$$\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{4l^4}{\lambda_1^2(1+l^2)^2} - \frac{8l^4(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^2(1+l^2)^3},$$

quantité négative avec $l < \lambda_1$, donc φ reste négative et les éléments d'intégration varient avec z en raison inverse de l ou de λ ($l = \lambda\varepsilon$).

Ainsi donc pour le même λ_1 la vitesse superficielle croît quand on passe des couches homofocales aux couches homothétiques, puis à celles du cas de la *vitesse uniforme*, ou sensiblement uniforme, sur l'axe de rotation, car alors le λ de chaque couche décroît.

On a donc, pour le même λ_1, c'est-à-dire le même aplatissement superficiel et la même figure extérieure

(40) ω_1 homofocal $<$ ω_1 homothétique $<$ ω_1 uniforme.

Les courbes des ω_1 s'étageront dans le même ordre.

Dans la formule (37), qui donne la vitesse de rotation au centre ω_0, désignons par $\psi(\lambda)$ l'expression en λ, et dérivons-la par rapport à λ. On obtient

$$(41) \qquad \frac{d\psi}{d\lambda} = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\,\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\,\frac{h}{\lambda}.$$

h est toujours positif, donc pour le même λ_0 la valeur de chaque élément d'intégration varie en sens inverse de λ. Or dans ce cas, λ_0 étant le même, les λ augmentent en allant du cas de la vitesse uniforme aux ellipsoïdes homothétiques et aux surfaces homofocales. On aura donc pour le même λ_0, ou le même aplatissement central,

(42) ω_0 uniforme $<$ ω_0 homothétique $<$ ω_0 homofocal.

Or on a pour les surfaces homothétiques $\omega_0^2 = 2\pi f \rho_0 h$. Donc dans le cas d'une vitesse uniforme, si λ_0 varie de 0 à l'infini, la valeur de la vitesse restera toujours inférieure à celle-ci.

103. **La variation de la vitesse de rotation et des aplatissements d'un ellipsoïde hétérogène quelconque est comprise entre ceux de deux ellipsoïdes homogènes.** — D'après la formule (40) en com-

parant les ω nous avons vu que ω_1 uniforme $> \omega_1$ homofocal et ceci quelle que soit la position du point considéré. Ceci est donc vrai également pour la vitesse équatoriale ω_e. D'après la valeur de ω_1 homofocal (35) on peut écrire pour l'ellipsoïde réel et en équilibre

$$(43) \qquad \frac{\omega_e^2}{2\pi f} > \mathrm{D} h_1, \qquad \omega_e^2 > 2\pi f \mathrm{D} h_1.$$

De même d'après la formule (42) en comparant ω_0 uniforme et ω_0 homothétique (31)' on aura, dans le cas d'équilibre (vitesse uniforme sur l'axe de rotation),

$$(44) \qquad \omega_0^2 < 2\pi f \rho_0 h_0, \qquad h = \frac{2+\lambda^2}{\lambda^2} \operatorname{arc\,tang} \lambda - \frac{3}{\lambda^2},$$

où dans h_0 on donne à λ la valeur λ_0 correspondant à ω_0, vitesse au centre de l'ellipsoïde hétérogène en équilibre.

Enfin nous venons de voir que cette dernière vitesse ω_0 est toujours plus grande que la première ω_e. On aura donc finalement, pour toutes les vitesses de rotation ω d'une masse hétérogène en équilibre hydrodynamique, qui sont comprises entre la vitesse à l'équateur et la vitesse au centre

$$(45) \qquad 2\pi f \mathrm{D} h_1 < \omega_e^2 < \omega^2 < \omega_0^2 < 2\pi f \rho_0 h_0.$$

h_1 est fonction de λ_1 ou de l'aplatissement superficiel et h_0 de λ_0 ou de l'aplatissement central. D'où le théorème :

Les vitesses internes d'une masse hétérogène, dont les couches sont ellipsoïdales, restent toujours comprises entre celles de deux ellipsoïdes homogènes, l'un qui aurait la même densité moyenne et le même aplatissement superficiel que la masse hétérogène, l'autre qui aurait la même densité centrale et le même aplatissement central.

Remarque. — Avant que la vitesse de rotation n'ait atteint son maximum on a $h_0 < h_1$ et la relation (45) peut s'écrire à plus forte raison

$$(46) \qquad 2\pi f \mathrm{D} h_1 < \omega^2 < 2\pi f \rho_0 h_1, \qquad 1 < \frac{\omega^2}{2\pi f \mathrm{D} h_1} < \frac{\rho_0}{\mathrm{D}}.$$

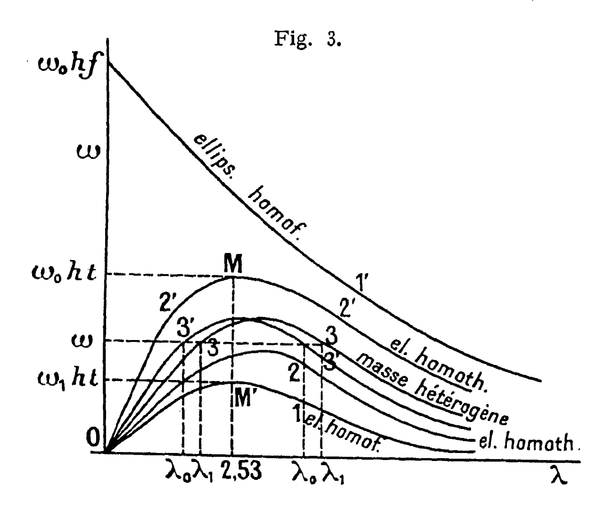
La vitesse de rotation de l'ellipsoïde hétérogène est comprise entre celles de *deux ellipsoïdes homogènes de même aplatisse-*

ment et de densités respectivement égales à sa densité moyenne et à sa densité centrale.

Cette relation a probablement lieu au delà du maximum, et pour toutes les vitesses de rotation, mais cette démonstration n'a pas été faite.

D'ailleurs l'étude complète de la variation des vitesses de rotation, avec les aplatissements, a été faite par M. Véronnet, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1912, et est traduite par la figure 3. On a mis les valeurs de λ en abscisses, elles varient

Fig. 3.



de o, pour la sphère, à l'infini, pour le disque aplati. La courbe n° 1 ou $\omega_1 hf$ inférieure, représente en ordonnée la *vitesse superficielle* de rotation des ellipsoïdes homofocaux. Elle est la même que celle des ellipsoïdes homogènes, comme on l'a vu. La courbe supérieure 1 donne la variation $\omega_0 hf$ de la *vitesse centrale* des mêmes ellipsoïdes homofocaux. La courbe 2′ donne $\omega_0 ht$, ou la vitesse centrale des ellipsoïdes homothétiques, qui est également la même que celle des ellipsoïdes homogènes, maximum pour $\lambda = 2,53$. La courbe 2 donne $\omega_1 ht$, vitesse superficielle des ellipsoïdes homothétiques, analogue à la précédente, un peu décalée vers la droite. Enfin, entre ces deux dernières, les courbes 3 et 3′ donnent la vitesse de rotation d'une masse hétérogène en équilibre relatif, en fonction de la valeur de l_1 à la surface ou de la valeur de l_0 au centre. Ces deux courbes sont très voisines et repré-

sentent la variation de la vitesse de rotation d'une masse hétérogène en équilibre relatif. Elles sont tout entières comprises comme on le voit entre les deux courbes 1 et 2′, relatives à deux ellipsoïdes homogènes.

104. **Le problème réel. Discussion avec moment de rotation constant.** — Dans la discussion précédente nous avons étudié la variation de la forme, ou de λ, en fonction de la variation de la vitesse de rotation ω, en supposant que la densité ρ restait constante. Dans le problème pratique de l'évolution des astres, comme l'a fait remarquer Laplace, c'est la somme des moments des quantités de mouvement, ou le moment de rotation qui reste constant, quand la densité varie par la contraction.

Désignons par μ ce moment de rotation, par I le moment d'inertie, on a

$$(47) \qquad \mu = \mathrm{I}\omega, \qquad \mu = \int_1^0 \omega\, d\mathrm{I}.$$

Dans notre problème, où ω est variable, il faudra étendre la somme à toutes les particules, c'est-à-dire à toutes les couches et aux parallèles de chaque couche, pour avoir le moment total.

105. **Définition de la contraction uniforme, qui conserve les couches d'égale densité.** — Il faut définir ici de plus près le mode de contraction, qui est exigé par le problème.

Dans le problème des ellipsoïdes homogènes, la contraction devait nécessairement conserver l'homogénéité, c'est-à-dire qu'elle devait être uniforme et partout la même. Le rapport du volume d'une masse élémentaire dm à son volume primitif devait rester à chaque instant le même pour tous les points. Dans les ellipsoïdes, le processus de la contraction uniforme peut être décomposé suivant les trois axes, en trois contractions linéaires uniformes, c'est-à-dire que tous les points, situés sur des plans parallèles à l'un des plans de coordonnées, s'en rapprochent proportionnellement à leur distance à ce plan.

Soient les trois axes x, y, z. Les trois rapprochements élémentaires du point seront définis par

$$\delta x = x\frac{\delta a}{a}, \qquad \delta y = y\frac{\delta b}{b}, \qquad \delta z = z\frac{\delta c}{c}.$$

Si les contractions suivant les différents axes sont les mêmes, l'ellipsoïde conserve la même forme. Il suffit de modifier les coefficients de contraction linéaire, suivant les différents axes, pour modifier la forme, en même temps que la grandeur. On voit que ce mode de contraction des ellipsoïdes, le plus normal et naturel, ne produit aucun déplacement d'une molécule par rapport aux autres, n'introduit aucun frottement, ni aucune force dissipative, ce qui est très important au point de vue de la stabilité. En effet ceci ne peut plus avoir lieu pour les figures dérivées des ellipsoïdes, comme l'a remarqué Poincaré, et il a donné la formule spéciale déterminant la condition de stabilité dans ce cas.

Pour les ellipsoïdes hétérogènes nous définirons de la même façon les conditions de la contraction uniforme. Comme les ellipsoïdes sont de révolution nous distinguons seulement deux contractions linéaires, l'une δz proportionnelle à z et parallèle à l'axe de rotation, l'autre δx proportionnelle à x et normal à cet axe. Si l'ellipsoïde s'aplatit, le coefficient de proportionnalité de δz est plus grand que celui de δx, mais la contraction reste la même partout. Les rapports des densités restent les mêmes partout. Les surfaces d'égale densité sont conservées.

Étudions la variation du moment d'inertie I au cours de la contraction. On voit tout de suite que la contraction δx, parallèle à l'axe de rotation, ne modifie pas ce moment. Considérons, suivant la méthode de M. Hamy, la décomposition de l'ellipsoïde hétérogène en ellipsoïdes homogènes de volume V et de densité $d\rho$ dont la masse élémentaire dm est égale à $V\,d\rho$. Le moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène de révolution étant $\frac{2}{5}Ma^2$, on aura en désignant par x le grand axe des ellipsoïdes élémentaires internes

$$(48)\qquad I = \frac{2}{5}\int_1^0 x^2\,dm = \frac{2}{5}a^2\int_1^0 \frac{x^2}{a^2}\,dm = \frac{2}{5}\alpha M a^2, \qquad \alpha < 1.$$

Le rapport $\frac{x}{a}$ du grand axe x d'une couche d'égale densité, au grand axe extérieur a, reste constant dans la contraction. Nous désignerons par α sa valeur moyenne définie par cette formule et qui reste également constante et plus petite que l'unité.

On voit immédiatement d'ailleurs que α est plus petit que 1, dans un ellipsoïde hétérogène, car pour un ellipsoïde homogène

il est égal à 1, tandis que dans l'ellipsoïde hétérogène la masse est plus concentrée vers l'axe et I doit être plus petit, on aura donc toujours $\alpha < 1$ quelle que soit la manière dont se fasse la contraction, même si elle produisait un déplacement quelconque des molécules. Mais alors α pourrait ne plus être constant. Il pourrait varier entre deux limites resserrées. En tenant compte de ces deux limites, la discussion et les résultats resteraient les mêmes.

106. Variation du grand axe pendant la contraction. — La formule (46) donne donc deux limites de la vitesse de rotation ω d'une masse hétérogène, en fonction de son aplatissement. qui est défini par la fonction h.

En introduisant la masse M, on obtient

$$(47)\qquad h\sqrt{1+l^2} < \frac{2}{3}\,\frac{\omega^2 a^3}{f\mathrm{M}} < \frac{\rho_0}{\mathrm{D}}\,h\sqrt{1+l^2}, \qquad \mathrm{M} = \frac{4}{3}\pi\,\frac{\mathrm{D}a^3}{\sqrt{1+l^2}}.$$

Cette formule nous a déjà permis, au n° 85, de déterminer deux limites du rayon équatorial a, par rapport à celui d'une masse homogène égale à M, et ayant la même vitesse de rotation ω.

Désignons par ω' et a', la vitesse de rotation et le rayon équatorial d'une masse homogène, ayant le même aplatissement, la même figure, on a

$$(48)\qquad \frac{2}{3}\,\frac{\omega'^2 a'^3}{f\mathrm{M}} = h\sqrt{1+l^2}.$$

En portant cette valeur de $h\sqrt{1+l^2}$ dans (47), on aura

$$\omega'^2 a'^3 < \omega^2 a^3 < \omega'^2 a'^3\,\frac{\rho_0}{\mathrm{D}}$$

ou encore

$$(49)\qquad \frac{\omega'^2 a'^4}{a'} < \frac{\alpha^2\omega^2 a^4}{\alpha^2 a} < \frac{\omega'^2 a'^4}{a'}\,\frac{\rho_0}{\mathrm{D}}.$$

Supposons maintenant que la masse homogène ait le même moment de rotation ωI que la masse hétérogène, on aura, $\omega'^2 a'^4 = \alpha^2\omega^2 a^4$ et la formule (49) peut s'écrire d'après (48)

$$(50)\qquad \frac{\mathrm{D}}{\rho_0}\,\frac{a'}{\alpha^2} < a < \frac{a'}{\alpha^2}.$$

Cette formule nous donnera le rayon équatorial a de la masse

hétérogène, en fonction de celui a' de la masse homogène ayant le même moment de rotation.

107. **Application à la Terre.** — Calculons le moment d'inertie de la Terre, au moyen de la loi des densités de Roche, par un calcul analogue à celui qui a été fait au n° 89, on obtiendra pour le coefficient α

$$\alpha = \frac{4}{7}\frac{7-5k}{4-3k}. \tag{51}$$

Pour la Terre $k = 0,75$ environ. On aura $\alpha = 0,82$ et $\alpha^2 = 0,67$. D'autre part $\frac{D}{\rho_0} = 0,55$, de sorte qu'on aurait

$$0,87\,a' < a < 1,50\,a'. \tag{52}$$

Ces valeurs limites sont moins resserrées que celles qui ont été données au n° 85 à cause de l'imprécision du terme α, mais elles les confirment par une autre méthode.

Remarque. — M. Alex. Gardedieu, dans une thèse très intéressante, qui sera publiée dans les *Annales de l'Académie des Sciences de Bruxelles*, a fait la discussion dans le cas du moment de rotation constant, en fonction de la variation de la densité, discussion correspondant au cas de Laplace et de la formule (32), n° 99, pour les ellipsoïdes homogènes. Au moyen des fonctions z et de procédés analogues à ceux indiqués dans le n° 102 et appliqués directement à l'expression de μ, n° 104, il démontre que cette discussion aboutit aux mêmes résultats que pour les ellipsoïdes homogènes, résultats compris également entre deux limites qu'il détermine.

TROISIÈME PARTIE.

LA FIGURE DE LA TERRE.

CHAPITRE IX.

PROBLÈME DE CLAIRAUT. LES SURFACES DE NIVEAU ELLIPSOÏDALES.

108. **Objet du Chapitre.** — Clairaut, dans la *Figure de la Terre* avait simplement démontré que les ellipsoïdes vérifiaient les conditions d'équilibre pour les surfaces de niveau d'une masse hétérogène, quand la masse *tournait en bloc* comme un corps solide, avec une *vitesse assez faible* pour que l'on puisse négliger le carré de l'aplatissement. Ces deux conditions forment les hypothèses de base du problème résolu par Clairaut.

Laplace a montré dans la suite, qu'une masse hétérogène en rotation lente devait prendre *nécessairement* la forme ellipsoïdale en première approximation. C'était la seule solution possible du problème.

La méthode de Laplace, basée sur le développement du potentiel en un point, exigeait deux développements différents, l'un pour la masse intérieure à la surface de niveau du point considéré, l'autre pour la masse extérieure à cette surface. Il se présentait des difficultés de raccordement et de passage aux limites, difficultés qui avaient été levées, mais qu'il était préférable de pouvoir éviter, selon le *vœu de Tisserand*.

La méthode de M. Hamy, exposée au Chapitre VI, évitait déjà ces difficultés, tout en conservant les deux développements. Nous

donnons ici la méthode d'Henri Poincaré, exposée dans ses *Figures d'équilibre*, qui donne toute satisfaction à tout point de vue, en partant du potentiel de la sphère, puis calculant le potentiel V de la figure voisine, au moyen de ΔV.

Nous y joignons l'exposé du principe d'une méthode analogue de M. Wavre, sensiblement plus compliquée, dont les résultats peuvent se développer en seconde approximation.

Nous terminerons par le fameux théorème de Stokes et l'extension qu'en a fait M. Véronnet en démontrant que chacun des coefficients du développement du potentiel est lui même un invariant.

109. Fonctions sphériques. — Nous avons vu dans le premier fascicule de ce tome IV, Chapitre V, une étude sur les fonctions sphériques. On a défini d'abord les *polynomes sphériques*, $P_n(x, y, z)$, polynomes harmoniques, homogènes de degré n, qui vérifient l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. En coordonnées polaires, r, θ, φ, les polynomes sphériques pourront s'écrire

$$(1) \qquad P_n(x, y, z,) = r^n Y_n(\theta, \varphi), \qquad P_n = r^n Y_n, \qquad \Delta(r^n Y_n) = 0.$$

Les fonctions Y_n de θ et φ, sont les *fonctions sphériques*.

La formule (96), n° 33, donnait l'expression de ΔV en coordonnées polaires. Si la fonction V ne dépend que de r, elle se réduit à

$$(2) \qquad \Delta V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}.$$

Le n° 41 du même volume donnait le développement du potentiel d'une couche sphérique pour une série de fonctions sphériques Y_n.

On peut établir directement et rapidement cette formule au moyen du calcul vectoriel [1]. En désignant par ρ le rayon vecteur d'un point, dont r est la longueur, la dérivée, par rapport à ce vecteur ρ, s'écrira

$$(3) \qquad \text{grad}\, V = \frac{dV}{d\rho} = \rho_1 \frac{dV}{dr} = \frac{\rho}{r}\frac{dV}{dr}, \qquad \rho = \rho_1 r.$$

ρ_1 est la *direction* du vecteur ρ. Comme V dépend uniquement de r par hypothèse, la dérivée se fait dans la direction ρ_1 de ρ.

---

[1] ALEX. VÉRONNET, *Le calcul vectoriel. Cours d'algèbre*, Chap. VII. Gauthier-Villars, 1933.

En prenant de nouveau la dérivée par rapport à ρ de cette expression (3), on aura la divergence du gradient de V ou le laplacien de V.

$$(4)\qquad \text{div grad } V = \Delta V = \frac{d}{d\rho}\frac{dV}{d\rho} = \frac{d^2V}{d\rho^2}$$
$$= \rho_1\rho_1\frac{d}{dr}\frac{dV}{dr} + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{dV}{dr} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}.$$

En effet $\rho_1^2 = 1$, carré d'un vecteur de longueur égale à l'unité, et l'on aura, pour le développement analytique de cette direction ρ_1, suivant les 3 directions ξ, η, ζ des axes

$$\rho_1 = \frac{\rho}{r} = \xi\frac{x}{r} + \eta\frac{y}{r} + \zeta\frac{z}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

On aura alors pour la divergence de ρ_1,

$$(5)\qquad \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \frac{2}{r};$$

d'où la formule (4).

Calculons maintenant le laplacien $\Delta(UP)$ de la fonction UP, où P est un polynome sphérique (1) et U une fonction de r seul. On aura d'abord comme ci-dessus

$$\text{grad}(UP) = \frac{d}{d\rho}(UP) = P\frac{dU}{d\rho} + U\frac{dP}{d\rho},$$

$$(6)\qquad \Delta(UP) = P\frac{d^2U}{d\rho^2} + 2\frac{dP}{d\rho}\frac{dU}{d\rho} + U\frac{d^2P}{d\rho^2},$$

comme $\Delta P = 0$ d'après (1) le dernier terme est nul.

D'après les expressions (1) et (3) également, le produit des deux dérivées premières pourra s'écrire, P étant un polynome agébrique d'ordre n,

$$\frac{dP}{d\rho}\frac{dU}{d\rho} = \rho_1\frac{dP}{dr}\rho_1\frac{dU}{dr} = n\,r^{n-1}Y_n\frac{dU}{dr} = \frac{n}{r}P_n\frac{dU}{dr}.$$

En portant cette valeur et celle de (4), avec V = U, dans (6), cette dernière formule deviendra

$$(6')\qquad \Delta(UP_n) = P_n\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r}\frac{dU}{dr}\right).$$

On aura de même, en remplaçant le polynome P_n, par une fonction sphérique Y_n,

$$\Delta(UY_n) = \Delta\left(U\frac{P_n}{r^n}\right) = \frac{1}{r^n}\Delta(UP_n) + (UP_n)\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r^n}\right),$$

$$(7) \qquad \Delta(UY_n) = Y_n\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n(n+1)U}{r^2}\right).$$

On retrouve les fonctions sphériques, ou les polynomes sphériques multipliés par une expression différentielle du second ordre de U. Ces expressions sont employées par Poincaré dans sa méthode.

110. Formules relatives à la sphère. — Quand il n'y a pas de vitesse de rotation, les surfaces équipotentielles sont sphériques, comme les surfaces de niveau et les surfaces d'égale densité. Le potentiel V_0 en un point quelconque dépendra uniquement de r. On aura, en vertu de (2) et de l'équation de Poisson, en désignant par ρ la densité en ce point,

$$(8) \qquad \Delta V_0 = \frac{d^2V_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV_0}{dr} = -4\pi f\rho.$$

La force d'attraction, au point considéré s'écrira, D étant la densité moyenne de la masse contenue dans la sphère de rayon r,

$$(9) \qquad F = \frac{dV_0}{dr} = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi f r D.$$

Or ρ et V_0 sont uniquement fonctions de r. On peut supposer réciproquement que ρ est uniquement fonction de V_0, et ΔV_0 également d'après (8). On pourra donc écrire

$$(10) \qquad \Delta V_0 = f(V_0), \quad f'(V_0) = \frac{d(\Delta V_0)}{dV_0} = \frac{d(\Delta V_0)}{dr}\frac{dr}{dV_0} = \frac{3\rho'}{rD}.$$

La dernière expression se déduit de la précédente d'après (9) et d'après (8) dérivée par rapport à r, ce qui donne ρ'.

Or la masse contenue dans la sphère de rayon r est

$$(11) \qquad m = 4\pi\int_0^r \rho r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3 D, \qquad Dr^3 = \int_0^r \rho\, dr^3.$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à r on a

$$3r^2 D + r^3 D' = 3r^2 \rho, \qquad r D' = 3(\rho - D). \tag{12}$$

En dérivant de nouveau, on aura encore

$$3\rho' = 4D' + rD''. \tag{13}$$

ρ' et D' sont négatifs; ρ et D augmentent vers le centre, en sens inverse de r.

D'après (10) la dérivée de ΔV_0 est exprimée en fonction de ρ' et D. Elle sera donc fonction seulement de la densité moyenne D et de ses deux premières dérivées D' et D'' d'après (13).

Désignons par ζ la *variable de Tisserand*, on a

$$\zeta = -\frac{rD'}{D} = -3\left(\frac{D}{\rho} - 1\right), \qquad 0 < \zeta < 3, \tag{14}$$

ζ reste compris entre o et 3.

En effet ζ est positif et D' négatif, car $\rho < D$, la densité en un point étant plus petite que la densité moyenne de la sphère sous-jacente. D'autre part $\zeta < 3$, car $\rho > 0$.

La limite $\zeta = 0$, ou $D' = 0$, est atteinte par une masse homogène, $\rho = D$, en chaque point. La limite $\zeta = 3$ est atteinte pour une masse totalement concentrée, où la densité serait sensiblement nulle partout $\rho = 0$. On voit que ces deux limites sont atteintes pour les deux cas extrêmes, où l'aplatissement e atteint aussi les deux limites de Clairaut, n° 80.

111. Développement du potentiel pour une figure voisine de la sphère. — La masse étant soumise à une rotation uniforme, les surfaces de niveau $U = \text{const.}$ sont définies par l'équation

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \tag{15}$$

La vitesse de rotation étant faible, la figure restera sphéroïdale, ou voisine de la sphère, et toutes les surfaces de niveau également. La déformation sera faible et fonction de ω^2.

Le potentiel V restera donc voisin de celui de la sphère V_0 et fonction également de ω^2. On peut le développer suivant les puissances de ω^2 et, en première approximation, on ne conservera

que le premier terme en ω^2. Ce sera une fonction $F(\omega^2, x, y, z)$, ou $F(\omega^2, r, \theta, \varphi)$ d'un point quelconque de la sphère et l'on pourra développer cette fonction en une somme de fonctions sphériques

$$V = V_0 + F(\omega^2, r, \theta, \varphi) = V_0 + \Sigma HY, \tag{16}$$

H contiendra ω^2 en facteur, et sera fonction de r seul. On sait, en effet, par l'étude des fonctions sphériques, que l'on peut toujours séparer une fonction $F(r, \theta, \varphi)$ en un produit de deux fonctions $\varphi(r)\psi(\theta, \varphi)$, ou HY.

En prenant le laplacien de (16), on aura

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta F, \qquad \Delta V = \Delta V_0 + \Sigma \Delta(HY). \tag{17}$$

D'après (15) et (16) on peut encore écrire

$$V_0 = V - F = U - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - F. \tag{18}$$

D'autre part, d'après (10), on peut dans (17) remplacer ΔV_0 par $f(V_0)$ tirée de (18), ce qui donne, en développant par rapport à ω^2, et négligeant les puissances supérieures,

$$\Delta V = f\left(U - \frac{1}{2}\omega^2 \ldots\right) + \Delta F = f(U) + \varphi(U). \tag{19}$$

La fonction $\varphi(U)$ contient tous les termes en ω^2, seuls conservés.

Développons cette expression (19) par la formule de Taylor, au voisinage de $U = V_0$, c'est-à-dire au voisinage de la sphère, on aura

$$\Delta V = f(V_0) + (U - V_0)f'(V_0) + \varphi(V_0). \tag{20}$$

$U - V_0$ et $\varphi(V_0)$ sont de l'ordre de ω^2, on néglige les autres.

Comme $f(V_0) = \Delta V_0$, on aura encore en comparant avec (17)

$$\Sigma \Delta(HY) = (U - V_0)f'(V_0) + \varphi(V_0), \qquad f'(V_0) = \frac{3\rho'}{rD}. \tag{21}$$

où l'on a d'après (15) et (16)

$$U - V_0 = \Sigma HY + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \tag{22}$$

112. Détermination des coefficients du développement. — On peut exprimer le terme en ω^2 au moyen des fonctions sphériques.

On a identiquement

$$(23)\qquad \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{3}r^2 + \frac{1}{6}r^2\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2} = \frac{1}{3}r^2\,\mathrm{Y}_0 + \frac{1}{6}r^2\,\mathrm{Y}_2,$$

où $\mathrm{Y}_0 = 1$ est une constante, fonction sphérique d'ordre zéro et Y_2 la fonction sphérique du second ordre.

La relation (21) devant être réalisée identiquement pour tous les points, pour toutes les valeurs de r, θ, φ, on peut annuler terme à terme, tous les coefficients de chaque fonction sphérique Y_n.

1° Considérons d'abord $\mathrm{Y}_0 = 1$, on aura

$$(24)\qquad \Delta \mathrm{H}_0 = \left(\mathrm{H}_0 + \frac{1}{3}\omega^2 r^2\right)\frac{3\rho'}{r\mathrm{D}} + \varphi(\mathrm{V}_0),$$

H_0 est une fonction de r seul, comme ρ', D et φ. D'après (4), $\Delta\mathrm{H}_0$ sera une fonction différentielle du second ordre de H_0, qui permettra de la déterminer complètement, ce qui sera fait au numéro suivant.

2° Les termes en Y_2 nous donneront ensuite

$$(25)\qquad \Delta(\mathrm{H}\mathrm{Y}_2) = \left(\mathrm{H} + \frac{1}{6}\omega^2 r^2\right)\frac{3\rho'}{r\mathrm{D}}\,\mathrm{Y}_2,$$

on peut de même éliminer Y_2 par (7) et $\mathrm{H} = \psi(r)$ sera déterminé également par une équation différentielle du second ordre.

3° Enfin, pour toutes les autres fonctions sphériques, on aura

$$(26)\qquad \Delta(\mathrm{H}\mathrm{Y}) = \mathrm{H}\mathrm{Y}\,\frac{3\rho'}{r\mathrm{D}},\qquad \mathrm{H} = 0.$$

Il y a une solution évidente $\mathrm{H} = 0$. On démontre qu'il n'y en a pas d'autres (*voir* Poincaré, *Figures d'équilibre*, p. 64).

Le développement du potentiel, formule (16), se réduira donc, dans le cas des figures voisines de la sphère, à

$$(27)\qquad \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_2\mathrm{Y}_2.$$

143. **Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes.** — Considérons un point M d'une couche sphérique de la masse, avant la rotation, où la densité était ρ et $\Delta\mathrm{V}_0 = -4\pi f\rho$. Par la rotation, cette couche de densité ρ se déforme, et le point matériel qui était en M

vient en M'. La densité en M sera alors, en appelant ζ le déplacement normal d'un point d'une couche

$$\rho_1 = \rho - \frac{d\rho}{dr} dr = \rho - \frac{d\rho}{dn} dn = \rho - \rho'\zeta.$$

En multipliant tous les termes de cette relation par $-4\pi f$, et en désignant par V le potentiel au point M, où la densité est ρ_1, on aura, d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = \Delta V_0 + 4\pi f \rho' \zeta. \tag{28}$$

Cette équation donne la valeur de ζ, en chaque point, d'après (17)

$$\zeta = \frac{\Sigma \Delta(HY)}{4\pi f \rho'}. \tag{29}$$

Ce déplacement, égal à dr ou dn, est positif ou négatif. La déformation doit être telle, que le volume renfermé dans la couche de densité ρ reste invariable. Désignons par $d\sigma$ l'élément de surface d'une couche d'égale densité, déplacé de la quantité ζ. L'élément de volume dû à la déformation sera $\zeta d\sigma$. L'intégrale sera étendue à toute la surface sphérique, où r sera considéré comme constant. Comme H est fonction uniquement de r, on pourra écrire, d'après (7),

$$\int \zeta \, d\sigma = 0, \qquad \int \Sigma \Delta(HY) \, d\sigma = \Sigma \psi(r) \int Y \, d\sigma = 0. \tag{30}$$

Tous les termes s'annulent séparément, d'après les propriétés des fonctions sphériques sauf le premier où $Y_0 = 1$ et qui donne $\Delta H_0 = 0$, d'où, d'après (4),

$$\Delta H_0 = \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_0}{dr}, \qquad H_0 = A + \frac{B}{r}.$$

L'intégrale générale est définie par les deux constantes A et B. Mais B est nul, autrement le potentiel serait infini au centre d'après (27), ce qui est impossible. De même à l'infini V et V_0 sont nuls, quelle que soit la direction considérée, c'est-à-dire quel que soit $\frac{1}{r}$, donc H_0 est nul également et $A = 0$.

On a donc $H_0 = 0$ et l'équation (24) définit $\varphi(V_0)$ en se rédui-

sant à

$$\omega^2 r \frac{\rho'}{D} + \varphi(V_0) = 0, \qquad \varphi(V_0) = -\omega^2 r \frac{\rho'}{D}.$$

L'expression de ζ (29) se réduit donc à la seule valeur $\Delta(H_2 Y_2)$, qui, d'après (7), peut s'exprimer comme le produit de Y_2 et d'une fonction de r. Comme ρ' est également fonction de r seul, on peut écrire

$$(31) \qquad \zeta = \frac{\Delta(H_2 Y_2)}{4\pi f \rho'} = Y_2 \psi(r) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} \psi(r),$$

r étant le rayon de la sphère correspondante de même volume que la surface d'égale densité considérée, le rayon vecteur $r'(x, y, z)$ de la nouvelle surface sera, en négligeant ζ^2,

$$r'^2 = (r + \zeta)^2 = r^2 + 2r\zeta = r^2 + 2r \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} \psi(r),$$

c'est l'équation d'une famille d'ellipsoïdes de révolution, avec petit axe dirigé suivant Oz.

114. Détermination de l'aplatissement. Équation différentielle de Clairaut. Extension de la démonstration au mouvement permanent. — En désignant par a et c le rayon équatorial où $z = 0$, et le rayon polaire où $x = y = 0$, on pourra écrire $a = r + \zeta_1$ et $c = r + \zeta_0$, en tenant compte du signe de ζ. L'aplatissement sera défini par l'expression

$$(32) \qquad e = \frac{a - c}{r} = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{r} = 3r\psi(r) = \frac{3\zeta}{rY_2}.$$

Or, l'expression (29) de ζ se réduit à un seul terme $\Delta(H_2 Y_2)$ dans (31). On aura, d'après (32),

$$(33) \qquad \Delta(H_2 Y_2) = 4\pi f \rho' \zeta = \frac{4\pi}{3} f \rho' e r Y_2.$$

En identifiant avec (25), on aura

$$(34) \qquad \frac{4\pi}{9} f e D r^2 Y = \left(H + \frac{1}{6}\omega^2 r^2\right) Y = HY + \frac{1}{6}\omega^2 r^2 Y.$$

Prenons le laplacien Δ de cette expresion. On aura $\Delta(r^2 Y_2) = 0$, d'après (1). En égalant cette nouvelle valeur de $\Delta(HY)$ avec (33),

on obtient

$$(35)\qquad \Delta(e\,\mathrm{D}r^2\mathrm{Y}) = 3\rho' e r\mathrm{Y}.$$

Or $r^2\mathrm{Y}_2$ est le polynome sphérique P_2. Appliquons la formule (6) en faisant $e\mathrm{D} = \mathrm{U}$, l'équation (35) deviendra, après avoir supprimé le facteur commun $r^2\mathrm{Y}$,

$$(36)\qquad \frac{d^2(e\,\mathrm{D})}{dr^2} + \frac{6}{r}\,\frac{d(e\,\mathrm{D})}{dr} = \frac{3e\rho'}{r} = e\,\mathrm{D}'' + \frac{4e\,\mathrm{D}'}{r}.$$

Le dernier terme est obtenu en remplaçant ρ' par sa valeur (13). En développant les calculs on obtient

$$(36')\qquad e''r\,\mathrm{D} + 2e'r\,\mathrm{D}' + 2e\,\mathrm{D}' + 6e'\,\mathrm{D} = 0.$$

C'est l'*équation de Clairaut*, qui donne l'aplatissement e de chaque couche en fonction de r et de la densité moyenne D, par une équation différentielle du second ordre.

L'équation (36') peut encore s'écrire en introduisant ζ (14)

$$(37)\qquad r^2e'' + 2re'(3-\zeta) = 2\zeta e.$$

On peut ramener l'équation de Clairaut au premier ordre par une transformation, au moyen de la *fonction de Radau* (*voir* n° 132).

Remarque. — La démonstration de Poincaré ci-dessus, d'après laquelle dans l'équilibre relatif et en première approximation, les surfaces de niveau sont ellipsoïdales, peut s'étendre facilement au cas du *mouvement permanent*, avec fonction des accélérations. Dans ce cas, en effet, n° 48, les surfaces de niveau sont encore données par la formule (15) où la vitesse de rotation constante ω est remplacée par la vitesse de rotation moyenne ϖ, ainsi que dans les formules suivantes. Il est toujours fonction de ω, ou de ϖ, et de r seul, et toute la suite de la démonstration est conservée intégralement.

Dans le cas d'un *mouvement permanent quelconque*, avec vitesse de rotation quelconque, on aura encore des surfaces ellipsoïdales, à la seule condition que les écarts des vitesses avec celles du premier cas soient de l'ordre de la seconde approximation, ou de e^2.

115. Autre méthode par le développement du potentiel. — Considérons une surface de niveau S, et, pour le calcul du potentiel V en un point quelconque, séparons la masse intérieure à la surface S, et la masse extérieure. On pourra écrire

$$(38)\qquad V = f\int_V \frac{\rho}{r}\,d\tau = f\int_E \frac{\rho}{r}\,d\tau + f\int_I \frac{\rho}{r}\,d\tau.$$

Remplaçons alors dans la dernière intégrale, relative à la masse intérieure, la densité ρ par sa valeur tirée de (13), n° 33.

$$(39)\qquad \Delta U = -4\pi f\rho + 2\omega^2, \qquad U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = V + Q.$$

On aura

$$(40)\qquad V = f\int_E \frac{\rho}{r}\,d\tau + \frac{\omega^2}{2\pi}\int_I \frac{1}{r}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_I \frac{1}{r}\Delta U\,d\tau.$$

Or, la formule de Green, appliquée aux deux fonctions U et $\frac{1}{r}$, donne

$$\int_V\left(\frac{1}{r}\Delta U - U\Delta\frac{1}{r}\right)d\tau = \int_S\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)dS.$$

Mais $\Delta\frac{1}{r} = 0$, car $\frac{1}{r}$ est harmonique dans tout le volume, et la seconde intégrale est nulle. Nous calculons le potentiel en un point supposé intérieur à la surface S, ou dans le volume V. Il faut alors, à cause du terme $\frac{1}{r}$, qui devient infini pour $r = 0$, l'entourer d'une petite sphère σ, à laquelle on étendra l'intégrale de surface, en faisant tendre σ vers zéro. En remplaçant donc, dans la deuxième intégrale du second membre, dS par $dS + d\sigma$, on aura

$$\int_S U\frac{d}{dn}\frac{1}{r}(dS + d\sigma) = 4\pi(U_1 - U).$$

U_1 est la valeur constante de U sur la surface de niveau S, et l'intégrale est alors égale à 4π. D'autre part U est sa valeur sur σ, ou au point P, quand σ s'annule. On a le signe — car il faut prendre la normale en sens inverse sur la petite sphère. On a donc finalement

$$\int_I \frac{1}{r}\Delta U\,d\tau = \int_I \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\,dS - 4\pi(U_1 - U).$$

Portons cette valeur dans (40) en y remplaçant V par sa valeur, tirée de (39), on a

$$(41)\qquad f\int_E \frac{\rho}{r}\,d\tau + \frac{\omega^2}{2\pi}\int_I \frac{1}{r}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\,dS = U_1 - Q.$$

La première intégrale représente le potentiel dû aux couches extérieures à la surface S et au point P. La deuxième représente le potentiel dû au volume intérieur à la surface S, supposé rempli d'une masse de densité constante égale à $\rho = 1$. Enfin la troisième intégrale, d'après la valeur de la pesanteur n° 30, peut s'écrire $\frac{1}{r}g\,dS$, elle représente un potentiel dû à la surface S, sur laquelle on suppose répartie une densité de surface égale à g.

Dans l'intégrale intérieure, à densité constante égale à 1, on trace une sphère tangente intérieurement à la surface S, qui est de révolution. Son potentiel au point P, supposé entre S et cette sphère sera égal à $\frac{1}{3}\omega^2 R^2 X_2$, où R est le rayon vecteur de P_1 et (41) s'écrira, I' désignant le volume compris entre S et la sphère,

$$(42)\quad f\int_E \frac{\rho}{r}\,d\tau + \frac{\omega^2}{2\pi}\int_{I'} \frac{1}{r}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}g\,dS = U_1 - \omega^2 t^2 - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 X_2.$$

X_2 est le polynome de Legendre, qui remplace Y_2 pour les surfaces de révolution et t est le rayon de la sphère.

On remplace alors dans (42) $\frac{1}{r}$ par son développement en fonctions sphériques. En appelant R' le rayon du point variable

$$(43)\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{R'}\sum_0^\infty \left(\frac{R}{R'}\right)^n X_n.$$

Les coefficients de chaque puissance de R doivent vérifier l'équation (42). Pour $n = 0$, le second membre sera égal à

$$U_1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 = \text{const}.$$

Pour $n = 2$, c'est-à-dire pour R^2, le second membre sera $-\frac{1}{3}\omega^2 R^2 X_2$. Enfin il sera nul, pour toutes les autres valeurs de n.

Tel est le principe de la méthode exposée par M. Wavre sous le

nom de *procédé uniforme* dans le Chapitre IV de *Figures planétaires et géodésie*. Les développements ultérieurs pour arriver aux résultats pratiques, en première et seconde approximation, en sont assez longs et pénibles, et ne peuvent trouver place dans cet exposé.

116. Théorème de Stokes. Le potentiel à l'extérieur d'un astre ne dépend pas de sa constitution interne. — Ce potentiel à la surface, comme dans l'espace extérieur, ne dépend que de la forme de cette surface S, de la masse totale de l'astre M et de sa vitesse de rotation ω.

En effet sur la surface extérieure, qui est une surface de niveau, on a

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = A = \text{const.} \tag{44}$$

Sur la surface, la formule de la divergence, dans le cas d'une fonction dérivée $\frac{dV}{dn}$, nous donne

$$\int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma = \int_\tau \Delta V\,d\tau = -4\pi f\int_\tau \rho\,d\tau = -4\pi f M, \tag{45}$$

$d\tau$ est l'élément de volume, où l'intégrale est étendue à tout l'intérieur. En tout point extérieur on aura $\Delta V = 0$.

Soit alors une nouvelle distribution intérieure des densités, qui conserve la surface extérieure, comme surface de niveau, et A' et V' les nouvelles valeurs. Le équations précédentes auront encore lieu. Représentons par W la différence des valeurs du potentiel. Sur la surface extérieure on aura

$$W = V - V' = A - A' = \text{const.}, \qquad \int_S \frac{dW}{dn}\,d\sigma = 0. \tag{46}$$

De plus, on aura $\Delta W = 0$ à l'extérieur, comme $\Delta V = 0$.

La formule générale de la divergence, s'écrit pour une fonction vectorielle F quelconque

$$\int_\tau \frac{dF}{dr}\,d\tau = \int_S F\,dS. \tag{47}$$

$\frac{dF}{dr}$ est la divergence de cette fonction F, ou sa dérivée par rapport

au rayon vecteur et FdS est le produit algébrique du vecteur F et du vecteur dS, élément différentiel de la surface, orienté positivement suivant la normale extérieure.

Si F est le produit d'une fonction algébrique U, par le gradient d'une fonction algébrique V, on aura

$$(48)\qquad \mathrm{F} = \mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dr}, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dr} = \mathrm{U}\frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} + \frac{d\mathrm{U}}{dr}\frac{d\mathrm{V}}{dr}, \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} = \Delta\mathrm{V}.$$

D'autre part, le produit F dS pourra s'écrire en remplaçant dS par $n\,d\sigma$, où $d\sigma = |\,d\mathrm{S}\,|$ est la grandeur de l'élément dS et n sa direction normale positive, on aura

$$(49)\qquad \mathrm{F}\,d\mathrm{S} = \mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dr}\,d\mathrm{S} = \mathrm{U}\,\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma.$$

Ces valeurs de (48) et (49) portées dans (47) donnent

$$(50)\qquad \int_\tau \mathrm{U}\,\Delta\mathrm{V}\,d\tau + \int_\tau \frac{d\mathrm{U}}{dr}\,\frac{d\mathrm{V}}{dr}\,d\tau = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{U}\,\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma.$$

Si les deux fonctions U et V sont égales à W, on a

$$(51)\qquad \int_\tau \mathrm{W}\,\Delta\mathrm{W}\,d\tau + \int_\tau \left(\frac{d\mathrm{W}}{dr}\right)^2 d\tau = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{W}\,\frac{d\mathrm{W}}{dn}\,d\sigma.$$

Les deux premières intégrales sont étendues à un volume τ, enfermé dans une surface quelconque S, à laquelle s'applique la troisième intégrale.

Prenons comme volume d'intégration le volume compris entre la surface extérieure de l'astre S et une sphère S' de rayon très grand R, ayant le même centre que la masse. La première intégrale est nulle, avec $\Delta\mathrm{W} = 0$, pour tout ce volume extérieur à la masse. L'intégrale de surface devra s'étendre à S et à S'. En tenant compte des conditions ci-dessus (46), on aura

$$(52)\qquad \int_\tau \left(\frac{d\mathrm{W}}{dr}\right)^2 d\tau = (\mathrm{V} - \mathrm{V}')\int_{\mathrm{S}} \frac{d\mathrm{W}}{dn}\,d\sigma + \int_{\mathrm{S}'} \mathrm{W}\,\frac{d\mathrm{W}}{dn}\,d\sigma.$$

La première intégrale du second membre est nulle, d'après (46). La seconde s'écrira, d'après (46) également,

$$\int_{\mathrm{S}} (\mathrm{V} - \mathrm{V}')\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn} - \frac{d\mathrm{V}'}{dn}\right) d\sigma.$$

Or V et V′ sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$, $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dV'}{dn}$ de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$, et ι contient R^2. L'intégrale du second membre est donc de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et tend vers zéro, quand R tend vers l'infini. Le second membre de (52) est donc nul pour tout l'espace extérieur. L'intégrale du premier membre étendue à tout l'espace doit donc être nulle. Il faut que l'élément d'intégration $\frac{dW}{dr}$ soit nul. Donc W est constant dans tout l'espace et cette valeur constante doit être nulle car W est nul à l'infini, comme V et V′, on doit donc avoir $V' = V$, quel que soit la répartition interne des densités.

Il s'ensuit que les mesures du pendule, faites à des altitudes différentes, ou bien les perturbations produites par les astres extérieurs ne peuvent rien nous apprendre sur cette distribution intérieure des densités.

117. Extension du théorème de Stokes. Chaque coefficient des termes du développement du potentiel est un invariant. — Le potentiel, en un point P quelconque, extérieur à l'astre, à la distance r de son centre, peut se développer sous la forme

$$(53)\qquad V = f\sum_0^\infty \frac{V_n}{r^{n+1}} = f\frac{M}{r} + f\frac{C-A}{r^3}X_2 + \ldots$$

où les V_n sont exprimés au moyen des fonctions sphériques. Nous donnons les deux premiers termes du développement, pour un astre de révolution de masse M, les moments d'inertie étant A et C.

Soit V′ la valeur de ce potentiel, au même point, pour une autre distribution des densités. D'après le théorème de Stokes, on aura, en chaque point,

$$(54)\qquad V' - V = f\sum_0^\infty \frac{V'_n - V_n}{r^{n+1}} = [(C'-A') - (C-A)]\frac{fX_2}{r^3} + \ldots$$

Or r dépend du point P et les V_n de sa direction par les angles θ et φ dans les X_n. Cette expression devant être identiquement nulle en tout point de l'espace, il faut que les coefficients des fonctions

sphériques soient égaux pour les deux distributions des densités et invariants ([1]).

Le premier coefficient est la masse M, qui est évidemment un invariant.

Le second coefficient est la différence des moments d'inertie C — A. Clairaut en première approximation, Airy, Callandreau ([2]), en seconde approximation, avaient déjà démontré, que cette quantité pouvait s'exprimer par les seules données superficielles

$$(55) \qquad 3\frac{C-A}{Mc^2} = (2e-\varphi) + \left(3e^2 + \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{12}{7}\varphi e - \frac{8}{7}\gamma e^2\right),$$

c est le petit axe de la Terre, e son aplatissement, φ le rapport de la force centrifuge à l'attraction, et γ le coefficient, qui mesure la déformation de l'ellipsoïde en seconde approximation.

On peut d'ailleurs donner une démonstration directe de ce théorème. Les termes du développement du potentiel peuvent s'écrire

$$(56) \qquad V_n = \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} X_n\, d\varphi' \int_0^{a_1} \rho\, r'^{n+2}\, dr'.$$

ρ est la densité en un point intérieur $P'(r', \theta', \varphi')$ par rapport auquel est faite l'intégration étendue à tout le volume, a_1 étant la valeur du rayon à la surface. $X_n(\cos\gamma) = Y_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ dépend de la position du point P' et de celle du point $P(r, \theta, \varphi)$ pour lequel est calculé V.

La première intégrale à droite peut se développer en fonctions sphériques

$$\int_0^{a_1} \rho\, r'^{n+2}\, dr' = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 + \ldots.$$

En portant dans (56), l'intégration annule tous les termes où les indices sont différents et l'on a

$$V_n = \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} X_n Y'_n\, d\varphi' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n,$$

([1]) ALEX. VÉRONNET, *Extension du théorème de Stokes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 18 octobre 1926).

([2]) *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, Observatoire de Paris, 1889. HAMY, *Journal de Mathém.*, 1890, p. 102.

Y_n est la valeur que prend Y'_n, dans la direction θ, φ, du point P, quand on a intégré par rapport à φ' de o à 2π et par rapport à θ' de o à π. Les limites d'intégration étant constantes, les résultats ne dépendent plus de θ' et φ' à l'intérieur, mais des seules valeurs r, θ, φ relatives au point P, qui peut être pris sur la surface.

CHAPITRE X.

RELATIONS ENTRE LA DENSITÉ ET LES APLATISSEMENTS.

---

118. Contenu du Chapitre. — Après avoir établi l'équation différentielle générale, donnée dans le chapitre précédent, Clairaut avait établi les formules pratiques, qui permettaient de calculer l'aplatissement à la surface et sur les différentes couches internes. C'est l'étude de ces formules et des résultats que l'on en tire, qui forment l'objet de ce chapitre.

Clairaut en avait déduit des limites de l'aplatissement qui ont été resserrées dans la suite. On peut y joindre l'étude des formules de d'Alembert sur la valeur des moments d'inertie, qui fourniront des limites remarquables dans le chapitre suivant.

On étudiera encore la détermination de l'aplatissement de la Terre par l'action de la Lune, et la correction que peut apporter la présence de l'Océan au-dessus de l'écorce.

On remarquera que toutes les formules de ce chapitre, établies pour l'équilibre relatif, sont valables pour le mouvement permanent, où la vitesse de rotation serait variable d'une couche à l'autre. Cela tient à ce qu'en première approximation, les conditions relatives à l'équilibre des surfaces de niveau se trouvent toutes remplies par les surfaces ellipsoïdales.

119. Équation générale de Clairaut reliant les aplatissements à la vitesse de rotation. — La formule (18) du Chapitre 8 donne la vitesse de rotation ω sur la couche dont le petit axe est r. En développant par rapport à e et λ (7) et (21), négligeant λ^4 et e^2, et remplaçant λ^2 par $2e$, valeur en première approximation, on obtient la formule

$$(1)\qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \int_r^0 \frac{a^3}{r^3}\left(e_r - \frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}e\right)d\rho + \int_1^r \left(e_r - \frac{3}{5}e\right)d\rho.$$

a désignera dans ce chapitre le petit axe des couches ellipsoïdales, e désigne l'aplatissement sur la couche dont le petit axe est a, e_r l'aplatissement de la couche dont le petit axe est r, limite de l'intégration. Cette formule est valable du centre à la surface, dans les conditions indiquées au Chapitre VIII n° 97, que la vitesse de rotation ω soit la même ou non.

En intégrant par parties on obtient la forme classique, donnée par Clairaut, au lieu de celle en $d\rho$, donnée par la méthode de M. Hamy,

$$(2)\qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3 - \frac{3}{5}\,\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, dea^5 - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de.$$

Il faut remarquer qu'en négligeant λ^4 ou e^2, alors ω ne dépend que de la distance au centre r, et est indépendant de la latitude dans (1) et (2). La vitesse de rotation est la même sur tous les parallèles de chaque surface de niveau.

On a vu d'ailleurs, n° 97, que $\frac{\partial\omega^2}{\partial z}$ était négligeable, *en première approximation*. Les surfaces ellipsoïdales remplissent donc dans ce cas toutes les conditions hydrodynamiques d'équilibre, aussi bien dans le mouvement permanent que dans l'équilibre relatif, aussi bien avec une vitesse de rotation ω variable d'une couche à l'autre, qu'avec une même vitesse partout. Ce dernier cas était le seul envisagé par Clairaut.

Il est intéressant d'introduire dans cette formule le rapport φ de la force centrifuge et de l'attraction, à la surface, rapport donné par l'expérience avec une grande précision, et la densité moyenne D, de la masse contenue dans la couche r. On a les formules (¹)

$$(3)\qquad \varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1} = \frac{\omega^2 a}{g}, \qquad D = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3,$$

et en dérivant cette dernière, par rapport à r,

$$(3)'\qquad 3\rho = 3D + rD', \qquad 3\rho' = 4D' + rD''.$$

La formule (2) devient alors, D étant la densité moyenne de l'en-

---

(¹) L'expression φ étant de l'ordre de e, on peut y négliger l'aplatissement, en première approximation, en négligeant e^2.

semble,

$$(4)\qquad \frac{5}{3}\left(e\,\mathrm{D} - \frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{D}_1\right) = \frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, de\, a^5 + \int_r^1 \rho\, de.$$

Les formules (1), (2), (4), sont trois formes équivalentes de l'équation générale de Clairaut, reliant les éléments ω, e, ρ, r de chaque surface de niveau, éléments qui peuvent être tous variables. Si l'on considère ω, comme constant par exemple, on pourra calculer l'aplatissement e de chaque couche et de la surface, si l'on connaît la loi des densités ρ.

120. Les limites des aplatissements. — La formule (1) devient à la surface (1), avec $r = 1$,

$$(5)\qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \int_1^0 \left(e_1 - \frac{3}{5}a^2 e\right) a^3\, d\rho + \frac{2}{5} e_1 \rho_1.$$

Les indices 1 indiquent la valeur des éléments à la surface. La formule (3), intégrée par parties, donne

$$(6)\qquad \frac{1}{r^3}\int_r^0 a^3\, d\rho = -\rho + \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3 = \mathrm{D} - \rho.$$

En tenant compte de cette formule et de ce que l'on a, du centre à la surface $0 < a^2 e < e_1$, on obtient la *formule de Tisserand* (2)

$$(7)\qquad \frac{2}{5} < \frac{\varphi}{2e} < 1 - \frac{3}{5}\frac{\rho_1}{\mathrm{D}_1} < 1. \qquad 230 < \frac{1}{e} < 403.$$

En négligeant ρ_1 densité à la surface, on retrouve la relation fondamentale donnée par Clairaut, *indépendante des densités*, entre l'aplatissement et le rapport de la force centrifuge et de l'attraction,

$$(8)\qquad \frac{\varphi}{2} < e < \frac{5}{4}\varphi, \qquad \frac{4}{5} < \frac{\varphi}{e} < 2.$$

Pour la Terre on aurait $230 < 1 : e < 577$.

On aurait $e = \frac{\varphi}{2}$, si $a^2 e = 0$, c'est-à-dire : 1° si toute la matière

(1) En tenant compte du terme en ρ_1 fourni par l'ellipsoïde de surface, d'après la méthode Hamy, remarque n° 65, Chap. VI.

(2) TISSERAND, *Comptes rendus*, t. 99, 1884, p. 399 et *Bull. ast.*, t. 1, 1884, p. 417.

était condensée au centre, alors tous les a seraient nuls, ou 2° si toutes les couches intérieures étaient sphériques, tous les e intérieurs nuls. Ce dernier cas ne pourrait avoir lieu que pour une masse solide ou une masse fluide sans rotation.

On aurait $e = \frac{5}{4}\varphi$, si 1° $a^2 e = e_1$ à l'intérieur comme à la surface, c'est le cas des surfaces homofocales, ou si 2° l'intégrale se réduit à l'élément de surface correspondant à ρ_1, c'est-à-dire si $d\rho = 0$, cas de l'ellipsoïde homogène.

Si la vitesse de rotation ω est la même partout, ces deux limites correspondent au cas de condensation totale au centre, ou d'homogénéité.

On peut calculer φ pour les planètes dont on connaît la vitesse de rotation. L'aplatissement est compris entre les limites données par Clairaut. Il est toujours plus petit que $\frac{5}{4}\varphi$. On en conclut qu'aucune planète ne peut être homogène.

Pour la Terre, le rapport $\frac{\varphi}{e}$ est égal à 1,03. Il est plus voisin de 4/5ᵉ que de 2. La Terre ne peut pas avoir une très forte condensation vers le centre.

Pour Jupiter et Saturne, ces rapports atteignent 1,456 et 1,434. Ils se rapprochent de 2. Il doit donc y avoir une condensation prononcée dans ces deux planètes, comme l'indique d'ailleurs la faible densité moyenne, on verra plus loin qu'on ne peut rendre compte de l'aplatissement de ces deux planètes que par une loi des densités donnant une inflexion et une sorte de noyau central.

Pour la Terre, la densité superficielle est égale à environ la moitié de la densité moyenne. Le rapport $\frac{\varphi}{e}$ doit être compris entre 0,8 et 1,4 d'après (7). L'applatissement doit être compris entre 1/230ᵉ et 1/403ᵉ. Telle est l'approximation que permet d'atteindre cette première formule, indépendamment de toute mesure géodésique. Les limites primitives de Clairaut étaient 230 et 577.

121. L'équation différentielle de Clairaut. Premières transformations. — En dérivant l'équation (1) par rapport à r, on obtient

$$(9) \qquad \frac{3}{8\pi f}\frac{d\omega^2}{dr} = D\frac{de}{dr} + \frac{3}{r^4}\int_r^0 \left(e_r - \frac{a^2}{r^2}e\right)a^3\,d\rho.$$

On introduit ici l'hypothèse de la rotation uniforme, comme un corps solide, en faisant $d\omega^2 = 0$. L'équation (9) peut s'écrire alors

$$(10) \qquad r^6 D e' = 3 r^2 e \int_r^0 a^3 d\rho - 3 \int_r^0 a^5 e \, d\rho.$$

En dérivant une seconde fois et tenant compte de (3) et (3′), on retrouve finalement la formule du n° 114

$$(11) \qquad D r^2 e'' + 6 \rho r e' = 6(D - \rho) e = -2 r D' e.$$

Si la loi des densités ρ est donnée, la loi des aplatissements e sera donnée par cette équation différentielle du second ordre, en fonction de la variable r. C'est l'équation différentielle donnée par Clairaut. Elle a une grande importance théorique et a fait l'objet de très nombreux travaux.

On a cherché de différentes façons à simplifier cette équation différentielle. Avant la transformation de Radau, n° 132, qui la ramène au premier ordre, il faut citer celle de Legendre qui supprime le terme en e'. Elle a été utilisée par Airy ([1]).

Legendre considère l'expression eDr^3. Une première dérivation par rapport à r donne, en tenant compte des formules (3) et (3′)

$$(eDr^3)' = e' D r^3 + 3 e \rho r^2.$$

Une seconde dérivation donne trois des termes de la formule (11)

$$\frac{1}{2}(eDr^3)'' = e'' D r^2 + 6 e' \rho r + 6 e \rho + 3 e r \rho'.$$

En portant cette expression dans la formule (11), l'équation de Clairaut s'écrira

$$(11)' \qquad (eDr^3)'' = (2D + r\rho') 3 e r = \left(\frac{6}{r^2} + \frac{\rho'}{rD}\right) e D r^3.$$

On verrait facilement de même, en faisant les calculs, qu'on peut l'écrire encore

$$(11)'' \qquad [r^4 D^2 (er)']' = \frac{4}{r^2}(r^4 D^2)(er)$$

ou,

$$[(eD)' r^6]' = 3 e \rho' r^3.$$

([1]) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 2, p. 220.

122. Lois de variation des aplatissements internes. — 1° On voit que $\underline{a^2 e}$ est nul au centre et ensuite positif. On a donc, au voisinage du centre,

$$(a^2 e)' > 0 \quad \text{et} \quad r^2 e_r - a^2 e > 0.$$

Les éléments de l'intégrale de (9) sont donc positifs et le restent toujours. On a $e' > 0$. *Les aplatissements des couches de niveau sont toujours croissants du centre à la surface, dans une masse fluide hétérogène tournant tout d'une pièce.* C'est le premier théorème de Clairaut.

On voit d'après (9) qu'ils seront encore croissants, et *plus vite que dans l'hypothèse de Clairaut*, si la vitesse de rotation des couches internes croît du centre à la surface. On a donc ainsi un moyen de faire varier l'aplatissement superficiel théorique pour le faire cadrer avec les mesures données par la géodésie.

Les aplatissements croîtront moins vite que dans l'hypothèse de Clairaut si les vitesses sont décroissantes.

Enfin les aplatissements des couches internes seraient *constants* ou décroissants, si l'on avait une variation de vitesses telles que

$$(12) \qquad \frac{3}{8\pi f}\frac{d\omega^2}{dr} \leq \frac{3}{r^5}\int_0^r \left(e_r - \frac{a^2}{r^2} e\right) a^3\, d\rho.$$

2° Dérivons maintenant l'équation (2) par rapport à r, en faisant $d\omega^2 = 0$, on obtient

$$(13) \qquad (3e - re')\int_0^r \rho\, da^3 = \frac{3}{r^2}\int_0^r \rho\, d e a^5.$$

Le second membre est positif. on a donc

$$(14) \qquad re' - 3e < 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{e}{r^3}\right)' < 0.$$

Les aplatissements varient de telle façon que l'expression $\frac{e}{r^3}$ est décroissante du centre à la surface. C'est le second théorème de Clairaut.

En tenant compte de (3) et (4) l'expression (13) peut encore s'écrire

$$(15) \qquad D(re' + 2e) = \frac{5}{2}\varsigma D_1 + 3\int_r^1 \rho\, de.$$

En dérivant de nouveau on retrouve l'équation différentielle de Clairaut (11). *Voir* n° 133 d'autres lois de variation de e.

123. L'équation de d'Alembert relative aux moments d'inertie. — On a pour les moments d'inertie d'un ellipsoïde de révolution les formules connues, a étant le petit axe, A le moment par rapport à l'axe de rotation,

$$(16)\qquad A = \frac{2}{5}mb^2 = \frac{8}{15}\pi\rho a^5(1+\lambda^2)^2, \qquad \lambda^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2},$$

$$B = \frac{1}{5}m(a^2+b^2) = \frac{4}{15}\pi\rho a^5(1+\lambda^2)(2+\lambda^2).$$

On en déduit immédiatement les moments d'inertie d'une couche ellipsoïdale élémentaire de densité ρ. La différence des deux moments d'inertie, en négligeant λ^4 et prenant $\lambda^2 = 2e$, s'écrira

$$(16)' \qquad dA - dB = \frac{8}{15}\pi\rho\, da^5 e.$$

En intégrant du centre à la surface, on obtient immédiatement la relation

$$(17)\qquad J\int_0^1 \rho\, da^5 = \int_0^1 \rho\, da^5 e, \qquad J = \frac{A-B}{A}.$$

Cette formule (17) a été donnée par d'Alembert [1]. La valeur de J est donnée par l'astronomie et déduite des mesures de précession avec une grande précision, $\frac{1}{J} = 305{,}31$.

Cette expression donne une nouvelle relation entre les densités et les aplatissements. La loi des densités étant donnée elle permettra de calculer l'aplatissement superficiel qui cadre avec le nombre J, ou avec la précession. Ce sera l'aplatissement théorique correspondant à la précession, c'est-à-dire à l'action extérieure de la Lune sur le renflement équatorial. Cette formule permet donc de relier l'aplatissement à la densité au moyen d'une donnée purement astronomique.

124. Les trois formules fondamentales. — La formule géné-

---

[1] *Recherches sur différents points importants du système du monde*, t. 2, art. 6, p. 201.

rale (4) s'écrira à la surface en faisant $a_1 = 1$,

$$(18) \qquad \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 = \int_0^1 \rho \, dea^5.$$

Elle permet de déterminer une autre valeur de l'aplatissement, connaissant la loi des densités ρ, et en fonction du nombre φ dépendant de l'attraction et connue également avec précision $\frac{1}{\varphi} = 288,38$. Ce sera l'aplatissement théorique correspondant à l'attraction.

Ces deux relations permettent d'éliminer l'aplatissement du signe d'intégration. On a la relation

$$(19) \qquad \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 = J \int_0^1 \rho \, da^5.$$

On obtient l'aplatissement théorique superficiel e en fonction des nombres φ et J, par une simple intégration ne portant que sur l'expression de la loi des densités ρ, et ne contenant pas les aplatissements internes e.

Les trois formules (17), (18), (19) serviront séparément dans les calculs pratiques pour déterminer la valeur de l'aplatissement, qui cadrera avec la précession et J dans (17), ou avec l'attraction et φ dans (18), étant donnée une certaine loi de densité ρ.

La formule (19) permettra dans le chapitre suivant de calculer *deux limites* très importantes et très resserrées, entre lesquelles l'aplatissement e sera compris et qui ne dépendra que de φ et J.

Remarque. — La formule (16′) intégrée, en tenant compte de (18) où l'on rétablira a_1^5 dans le second membre, donne

$$A - B = \frac{8\pi}{15}\int_0^{a_1} \rho \, dea^5 = \frac{8\pi}{9}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 a_1^5,$$

$$\frac{A - B}{M} = \frac{2}{3} a_1^2 \left(e - \frac{1}{2}\varphi\right), \qquad A = \frac{A - B}{J} = \frac{2}{3}\frac{M}{J} a_1^2 \left(e - \frac{1}{2}\varphi\right).$$

On a tiré J de la formule (17). Ces formules donnent les *moments d'inertie de la Terre* et leur différence qui est un invariant, n° 177.

125. Nouvelles limites de l'aplatissement. — L'intégrale de (19)

peut s'écrire en intégrant par parties,

$$(20)\qquad F_1 = \int_0^1 \rho\, da^5 = \rho_1 + \int_1^0 a^5\, d\rho,$$

De même la densité moyenne (6) peut s'écrire

$$D_1 = \int_0^1 \rho\, da^3 = \rho_1 + \int_1^0 a^3\, d\rho.$$

Comme on a $a < 1$, l'axe polaire étant pris pour unité, on aura

$$(21)\qquad \int_1^0 a^5\, d\rho < \int_1^0 a^3\, d\rho, \qquad F_1 < D_1.$$

Cette valeur portée dans (19) donne

$$(22)\qquad e < \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{5}J, \qquad 1 : e > 270,3.$$

C'est une nouvelle limite de l'aplatissement, plus resserrée que $\frac{1}{2}\varphi$, n° 120.

La formule (17), intégrée de même par parties, donne

$$J\rho_1 + J\int_1^0 a^5\, d\rho = e_1\rho_1 + \int_1^0 a^5 e\, d\rho.$$

Comme les aplatissements sont décroissants on a $e < e_1$ et

$$(23)\qquad \int_1^0 a^5 e\, d\rho < e_1 \int_1^0 a^5\, d\rho \qquad \text{et} \qquad J < e_1.$$

On aurait pour la même raison, e_0 désignant l'aplatissement central, $e > e_0$; d'où l'on tire

$$(24)\qquad e_0 < \frac{J F_1 - e_1\rho_1}{F_1 - \rho_1} \qquad \text{et} \qquad e_0 < J.$$

puisque $J < e_1$. On obtient ainsi deux nouvelles limites de l'aplatissement superficiel, et une limite de l'aplatissement central, indépendantes de toute loi de densité, comme celles de Clairaut

$$(25)\qquad e_0 < J < e_1 < \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{5}J, \qquad 270,3 < \frac{1}{e} < 305,3.$$

On a vu que les limites de Clairaut étaient 230 et 577 dont le rapport est 2,5. Le nouveau rapport est 1,13. La considération des moments d'inertie permet de déterminer mathématiquement deux limites de l'aplatissement à 1/8e près.

La limite $e_1 > J$ a été signalée par Callandreau dans son *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes* (*Obs. de Paris*, t. 19, E, p. 19).

On peut aller plus loin et essayer de trouver une expression de l'aplatissement e, fonction de φ et J, mais indépendante de l'intégrale de (19) et de la densité ρ. C'est le problème qu'ont résolu Radau et Poincaré.

Nous verrons dans le chapitre suivant, que l'intégrale de (19) peut s'exprimer avec une très grande approximation, indépendamment de toute loi de densités et au moyen des seules données superficielles connues. H. Poincaré a déterminé une première limite de cette expression et de e. M. A. Véronnet en a déterminé une seconde extrêmement rapprochée, qui n'en diffère pas de plus d'un millième. Dans l'hypothèse d'une rotation uniforme, hypothèse de Clairaut, *l'aplatissement de la Terre se trouve ainsi déterminé à un millième près par les seules données astronomiques et physiques, indépendamment de toute mesure géodésique*.

126. La loi des aplatissements internes dépend uniquement de la loi des densités. — Considérons l'équation générale de Clairaut, formule (2), en écrivant partout la variable r pour simplifier, on a

$$\frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 - \frac{3}{5}\,\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, d e r^5 - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de. \tag{26}$$

Quelles que soient la loi des densités et celle des aplatissements, comme on a $0 < r < 1$, on peut les supposer développées suivant les puissances de r

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots), \qquad e = e_0(1 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \ldots), \tag{27}$$

où ρ_0 et e_0 sont la densité et l'aplatissement au centre.

En portant ces valeurs dans (26) et intégrant on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_0\rho_0(k_0 + k_1 r + k_2 r^2 + \ldots). \tag{28}$$

On obtient facilement l'expression de chacun des coefficients k en fonction des α et des β.

Si l'on suppose la vitesse de rotation constante, il faut annuler chacun des coefficients k, excepté k_0. On a

$$k_0 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\left[\beta_1\left(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \ldots\right) + 2\beta_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha_1 + \ldots\right) + \ldots\right]$$

$$k_1 = \left(\beta_1 + \frac{3}{4}\alpha_1\right) - \left(\frac{3}{5}\beta_1 + \frac{5}{6}\alpha_1\right) + \frac{3}{5}\beta_1 = \beta_1 + \frac{1}{4}\alpha_1 = 0,$$

$$(29) \qquad k_n = \beta_n + \Sigma_1^n \frac{3}{p+3}\alpha_p\beta_{n-p} - \frac{3}{n(n+5)}\Sigma_1^n p\,\alpha_p\beta_{n-p}.$$

En faisant $k_1 = 0$, on obtient $\beta_1 = -\frac{1}{4}\alpha_1$.

En annulant k_2, on détermine β_2 en fonction de α_1 et de α_2 et ainsi de suite. De plus toutes ces valeurs sont déterminées *linéairement*. Il n'y a toujours qu'une seule solution parfaitement déterminée.

Si donc on se donne la loi des densités on en déduira celle des aplatissements et réciproquement.

Si l'on suppose que la vitesse de rotation des couches internes n'est pas partout la même, on écrira la loi des vitesses de rotation d'une façon analogue

$$(30) \qquad \omega^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \ldots), \qquad \gamma_1 = \frac{k_1}{k_0}, \qquad \ldots.$$

Il faudra connaître, ou se donner, deux des lois donnant ρ, e, ou ω^2 pour déterminer la troisième. Il est plus naturel de supposer connue la loi des densités ρ, car il sera plus facile de faire des hypothèses, ou des mesures, sur cette donnée physique.

On peut supposer par exemple la densité ρ_1 à la surface et la densité moyenne D_1 suffisamment connues, ce qui permet de déterminer deux des paramètres ρ_0, α_1, α_2, ... de l'expression de ρ dans (27). On peut supposer tous les α nuls, sauf α_2, et l'on obtient la formule de Roche

$$(31) \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2), \qquad \rho_1 = \rho_0(1 - \alpha).$$

La courbe des densités est représentée par une parabole ayant son sommet au centre. Les deux coefficients ρ_0 et α sont complètement déterminés par les valeurs expérimentales ρ_1 et D_1, ce qui ne laisse

peut-être pas assez de souplesse à la formule pour représenter les autres données. On sait que ρ_1, densité à la surface, est déterminé par l'expérience d'Airy et doit vérifier la formule de l'accroissement de la pesanteur avec la profondeur.

Si au contraire on annule tous les coefficients α, sauf α_n qu'on laisse indéterminé, on aboutit à la formule de Lipschitz à trois paramètres.

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n), \qquad D = \rho_0\left(1 - \frac{3\alpha}{n+3} r^n\right). \tag{32}$$

On peut déterminer ρ et α par ρ_1 et D_1 et faire varier n de o à ∞. La loi des densités variera en même temps depuis l'homogénéité parfaite jusqu'à une certaine condensation, qui n'est d'ailleurs jamais totale. De plus on verrait facilement qu'avec cette formule tous les β sont nuls, sauf les multiples de n dans l'expression de e.

127. Formule de Hennessy. Paramètre de condensation de Callandreau. — Dans le cas d'une rotation uniforme, ou ω^2 constant, on a

$$\frac{\omega^2}{8\pi f} = k_0 e_0 \rho_0. \tag{33}$$

Or

$$\varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1}.$$

De plus on peut écrire

$$D_1 = \rho_0(1 + \alpha), \qquad e_1 = e_0(1 + \beta),$$

où α est la valeur d'une série formée avec les α, et β est une série formée avec les β et par conséquent aussi avec les α. On obtient alors facilement l'expression

$$e_1 = \frac{\varphi}{2} \frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{k_0} = \frac{\varphi}{2} F(\rho). \tag{34}$$

On voit que l'aplatissement superficiel e_1 est proportionnel à φ et uniquement fonction des α et par conséquent de la densité ρ.

Les formules de Clairaut montraient déjà que *la loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités*. On voit de plus ici qu'elle en dépend *linéairement, avec une solution unique*. Enfin *l'aplatissement superficiel e_1 est proportionnel au*

rapport φ *de la force centrifuge à l'attraction* [1], c'est-à-dire proportionnel au rapport de ω^2 à D_1.

Sur un astre, autre que la Terre, en y supposant la même loi de densité, l'aplatissement serait parfaitement déterminé par la connaissance de φ. Si l'aplatissement mesuré n'est pas le même c'est que la répartition des densités à l'intérieur y est certainement différente.

Le rapport $\frac{\varphi}{e}$ a pour valeur 1,03 pour la Terre et 1,456 et 1,434 pour Jupiter et Saturne. Ces valeurs indiquent pour Jupiter et Saturne un état de condensation analogue, mais très différent de celui de la Terre. Nous verrons que la valeur relative des densités superficielles doit y être beaucoup plus faible que sur la Terre.

Hennessy qui a donné la formule (34) a calculé l'aplatissement de la planète Mars en y supposant la même loi de densité que pour la Terre. Il trouve $\frac{1}{227,61}$ en prenant $\frac{1}{293,46}$, nombre de Faye, pour celui de la Terre. Il montre qu'il est en assez bon accord avec le nombre $\frac{1}{219}$ déduit par G. A. Young des observations de cette planète. On pourrait en conclure que la constitution interne de la planète Mars est voisine de celle de la Terre.

On verra au chapitre suivant que la fonction $F(\rho)$ de (34) de Hennessy n'est pas autre chose que $\frac{5}{\eta_1+2}$, où η_1 est la variable de Radau, que Callandreau a appelé précisément *le paramètre de condensation*. Pour la Terre la valeur de η_1 est 0,58, elle est de 1,64 et 1,59 pour Jupiter et Saturne.

En admettant que la loi des densités, et par conséquent $F(\rho)$ de (34), soit la même pour Jupiter et Saturne que pour la Terre, on obtient, en désignant par l'indice 1 les éléments relatifs à la Terre et $\varphi = 1:47$ étant la valeur sur Jupiter

$$e = e_1 \frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{1}{297} \frac{288}{47} = \frac{1}{48,4}.$$

---

[1] Laplace (*Mécanique céleste*) avait déjà signalé que e était proportionnel à φ, si la loi des densités était la même, et indiqué, comment on pouvait déduire l'aplatissement de Jupiter de celui de la Terre dans cette hypothèse. C'est en reprenant la même idée que G. H. Darwin montre que la loi des densités de Laplace ne permet pas d'expliquer l'aplatissement de Jupiter (*Monthly Notices*, 1876).

L'aplatissement de Jupiter serait de 1 : 48,4 au lieu de 1 : 17,1 soit près de trois fois plus petit. Pour Saturne on obtiendrait de même 1 : 26,4 au lieu de 1 : 9,2, valeur également trois fois trop petite. La loi de répartition des densités à l'intérieur de Jupiter et de Saturne est donc très différente de ce qu'elle est pour la Terre.

Supposons que la loi des densités de Saturne soit la même que celle de Jupiter, nous aurons pour son aplatissement

$$e = \frac{1}{17,1}\,\frac{47}{25,6} = \frac{1}{9,3}.$$

Nous retrouvons à 0,01 près l'aplatissement observé. La loi des densités pour Jupiter et Saturne doit être la même, comme elle semble être la même pour la Terre et Mars, mais elle doit être très différente pour ces deux groupes de planètes. Les deux grosses planètes doivent avoir une condensation plus prononcée que la Terre, une sorte de noyau central à plus forte densité, entouré d'une enveloppe superficielle plus légère.

128. Limites de l'aplatissement et de la densité au centre. — Cette question a été étudiée par Stieltjes, Radau, A. Véronnet ([1]). La formule (17) montre que J peut être considéré comme une valeur moyenne de e, toujours croissante du centre à la surface. On peut donc écrire comme on a vu n° **125**

$$e_0 < J < e_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e_0} > 305,31.$$

De plus la formule (15) s'écrit au centre

$$(35) \qquad e_0\rho_0 = \frac{5}{4}\varphi D_1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \rho\, de.$$

Comme on a $de > 0$ du centre à la surface, n° **122**, on en déduit

$$(36) \qquad e_0 > \frac{5}{4}\varphi\frac{D_1}{\rho_0}, \qquad \rho_0 > \frac{5}{4}\frac{\varphi}{e_0}D_1 > \frac{5}{4}\frac{\varphi}{J}D_1.$$

([1]) STIELTJES, *Bul. astr.*, t. 1, p. 465 et *Archives néerland.*, t. 19. RADAU, *Bul. astr.*, t. 2, p. 159. TISSERAND, *Méc. cél.*, t. 2, p. 226. A. VÉRONNET, *Journ. de Math.*, 1912, chap. VII.

Voir aussi M. HAMY, *Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes* (*Journal de Mathém.*, 1890, p. 125).

Comme on a $e_0 < e_1$ on peut remplacer e_0 par e_1 dans cette dernière expression, on obtient $\rho_0 > 7{,}07$.

C'est la première limite de la densité centrale obtenue par Stieltjes.

On a aussi

$$(37) \qquad \rho_1(e_1 - e_0) < \int_0^1 \rho\, de < \rho_1(e_1 - e_0).$$

En portant la première inégalité dans (35) on obtient

$$(38) \qquad \rho_0 > \frac{5}{4}\,\frac{\varphi}{e_1}\,D_1\,\frac{e_1}{e_0} + \frac{3}{2}\,\rho_1\left(\frac{e_1}{e_0} - 1\right).$$

En remplaçant ici e_0 par J qui est plus grand, on a encore

$$(39) \qquad \rho_0 > \frac{5}{4}\,\frac{\varphi}{J}\,D_1 + \frac{3}{2}\,\varphi_1\left(\frac{e}{J} - 1\right).$$

En ne tenant compte que du premier terme, en dehors de toute hypothèse sur l'aplatissement e et la densité superficielle ρ, on a $\rho_0 > 7{,}36$.

En faisant $1 : e = 297$ et ρ_1 compris entre 2 et 3 la limite de ρ_0 reste comprise entre 7,44 et 7,46.

Stieltjes et Radau démontrent aussi que l'on a l'inégalité

$$(\rho_0 - \rho_1)^2(F_1 - \rho_1)^3 > (D_1 - \rho_1)^5$$

en prenant $D_1 = 5{,}56$ et $F_1 = 4{,}74$ étant l'intégrale de (19) on obtient $\rho_0 > 7{,}3$ pour $\rho_1 = 2{,}0$ et $\rho_0 > 7{,}42$ pour $\rho_1 = 2{,}6$.

Si $\rho'' < 0$ on a encore (Stieltjes)

$$\rho_1 < 3F - 2D = 3{,}10,$$
$$\rho_0 < 10D - 9F = 12{,}94.$$

Si l'on porte dans (35) la seconde des inégalités (37) on obtient une limite supérieure de ρ_0, qui dépend de e_0

$$(40) \qquad \rho_0 < \frac{5}{2}\,\frac{\varphi D_1}{5e_0 - 3e_1}.$$

En donnant au rapport $e_1 : e_0$ différentes valeurs, les formules (38) et (40) donnent les deux valeurs limites entre lesquelles la densité

centrale reste comprise

$e_1 : e_0$	1.	1,1.	1,2.	1,3.	1,4.	1,5.
ρ_0.......	$< 7,05$	9,12	12,06	17,56	24,70	42,30
ρ_0.......	$> 7,05$	8,07	9,10	10,12	11,14	12,16

On ne peut pas songer à établir une limite supérieure de la densité, indépendante de e_0, car théoriquement la densité peut devenir aussi grande que l'on voudra au centre.

Les trois formules ci-dessus (17), (18), (19) permettent de résoudre complètement le problème de l'aplatissement en fonction de la loi des densités. En prenant la loi de Lipschitz à trois paramètres et faisant $1 : e_1 = 297$, on obtient pour les valeurs de la densité centrale ρ_0 qui correspondent à la densité superficielle ρ_1 les valeurs suivantes :

ρ_1.........	2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
ρ_0.........	9,70	10,25	11,07	12,39	15,08	22,62

La formule de Roche, qui rend assez bien compte des différents faits constatés, donne $\rho_0 = 10,52$. La densité centrale serait pratiquement comprise entre 10 et 23 et probablement voisine de 10,5. Il s'agit ici de la densité centrale *moyenne*, c'est-à-dire celle d'une certaine sphère entourant le centre. Il semble ainsi que les métaux lourds, comme le platine, ne doivent pas former une masse considérable. Nous verrons au Chapitre XIV quelles sont les constantes de la formule de Roche qui conviennent le mieux.

129. Détermination de l'aplatissement de la Terre par les observations de la Lune. — L'attraction de la Lune sur le renflement équatorial, qui détermine le mouvement de la précession, permet de déterminer la valeur de ce renflement, ou l'aplatissement en fonction du rapport d'inertie J, n° 123, formule (17). Réciproquement le renflement équatorial de la Terre agit sur la Lune et produit sur son mouvement des perturbations qui permettent de calculer aussi cet aplatissement.

Ces perturbations ont été calculées par Laplace, Hansen, Hill [1]. Deux seulement sont sensibles et à peu près égales, ce

[1] Hill, *Lunar inaqualities due to the ellipticity of the Earth*, Washington, 1884. Laplace avait montré dans sa théorie des satellites de Jupiter (*Méc. cél.*,

sont celles relatives à la longitude L et à la latitude l. La période de la perturbation δL de la longitude est de 18 ans $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire celle de la nutation. La période de la perturbation δl de la latitude est celle du mois lunaire. Elle est beaucoup plus facile à déterminer. C'est la seule qui a été utilisée. Elles dépendent d'ailleurs des mêmes éléments.

La perturbation de la latitude due au renflement équatorial est donnée par la formule

$$\delta l = -7439'' \frac{A - B}{M b^2} \sin D = -4959'' \left(e - \frac{1}{2} \varphi\right) \sin D,$$

où D est la longitude moyenne de la Lune comptée à partir de l'équinoxe mobile, A et B sont les moments d'inertie, M la masse de la Terre, b son grand axe. La seconde relation se déduit de la première par la formule de la remarque du n° **124**.

Hansen a montré de plus que l'action des planètes sur la Terre et la Lune produit des inégalités qui ajoutent $-0'',240$ au coefficient de sin D. Cette correction est importante, car cette différence de $0'',2$ introduit une différence de 5 unités dans l'inverse de l'aplatissement calculé par la formule ci-dessus.

La formule complète s'écrira donc

$$\delta l = -\left[4959'' \left(e - \frac{1}{2} \varphi\right) + 0'',240\right] \sin D.$$

Hansen a trouvé que, d'après les observations de la Lune, le coefficient de sin D est égal à $8'',382$. On en conclut $1 : e = 296,2$, nombre en rapport avec les plus récentes déterminations (Helmert, Hayford) et avec l'aplatissement théorique qui cadre avec l'attraction et la précession.

Faye au contraire trouve ce coefficient égal à $8'',59$, d'après les observations de Greenwich ([1]). Il en conclut un aplatissement $1 : e = 292,6$, analogue à celui qu'il avait déduit des mesures géodésiques.

---

t. 4, art. 27) que le rapport des axes de Jupiter peut être obtenu avec plus de précision que par l'observation directe, au moyen des mouvements des nœuds et des apsides des orbites des satellites.

([1]) FAYE, *Cours d'Astronomie*, t. 2, p. 316.

On voit que le coefficient en question peut varier de $0'',2$ et n'est pas déterminé avec assez de précision. Helmert donne pour la valeur de e déterminée par cette méthode $1 : e = 297,8 \pm 2,2$ à deux unités près (¹). En somme, chaque géodésien a tiré de la Lune une confirmation de ses mesures géodésiques.

130. L'aplatissement superficiel et l'océan. — On a vu plus haut les trois formules fondamentales (17), (18), (19) qui peuvent déterminer l'aplatissement superficiel et la loi des aplatissements en fonction de la loi des densités. Mais pratiquement, sur la Terre, la densité de la couche superficielle est mal définie, car elle se compose pour les $\frac{3}{4}$ de l'eau des mers et pour l'autre quart du sol des continents.

Dans une loi mathématique, comme celle de Roche, cette densité superficielle doit varier d'une façon continue avec la densité sous-jacente. Elle donne l'aplatissement d'une écorce, supposée régulière, et qui serait recouverte également par l'océan. Est-ce que l'aplatissement de la surface des mers, déterminée par la géodésie différera sensiblement de l'aplatissement de l'écorce solide calculée par les formules ?

D'après la méthode de calcul d'Hamy, on voit que les formules de Clairaut sont applicables pour des couches de densité discontinues.

Considérons alors la formule (15), où l'intégrale sera supposée appliquée seulement à la couche formée par l'océan, de densité ρ_1, le noyau sous-jacent ayant un rayon égal à r, un aplatissement e, une densité moyenne D. En remplaçant $\frac{re'}{e}$ par la variable de Radau η, nous pourrons l'écrire

$$(41) \qquad (\eta + 2)\mathrm{D}e - \frac{5}{2}\varphi \mathrm{D}_1 = 3\rho_1\, de,$$

D_1 est la densité moyenne totale, y compris l'océan, de est la variation de l'aplatissement en passant de la surface de l'écorce à la surface de l'océan. Remplaçons e, η, D par leurs valeurs

$$e = e_1 - de, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{D}_1 - d\mathrm{D}, \qquad \eta = \eta_1 - d\eta,$$

(¹) HELMERT, *Höhere Geodäsie*, t. 2, p. 473.

dD est calculé d'après la correction de la densité moyenne en ajoutant la couche de l'océan d'épaisseur dr. Le $d\eta$ est calculé d'après la formule différentielle du Clairaut-Radau (4) (n° 132). On a

$$\eta - \eta_1 = d\eta = [2\zeta(\eta + 1) - \eta(\eta + 3)] \frac{dr}{r}.$$

En portant ces valeurs dans (41), on obtient simplement

$$(42) \qquad \frac{de}{e_1} = \eta_1 \frac{dr}{r} \qquad \text{ou} \qquad \frac{re'}{e_1} = \eta_1$$

valeur de de, indépendante des densités ρ_1 et D_1 de la Terre et de l'océan, et qui se déduit directement de la définition de η.

La formule (42) peut encore s'écrire

$$d\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}\frac{de}{e} = -\frac{\eta_1}{e_1}\frac{dr}{r}.$$

Pour la Terre $\eta_1 = 0,575$, $e_1 = 1 : 297$, $r = 6370^{\text{km}}$, et la profondeur moyenne des mers est de 3600^{m}. La correction $d\frac{1}{e}$ de l'inverse de l'aplatissement 297, apportée par l'océan serait seulement de 0,1 et négligeable, car elle est au-dessous des erreurs des mesures géodésiques.

CHAPITRE XI.

LE PROBLÈME DE POINCARÉ.

131. Exposé du problème. — Les formules de Clairaut, étudiées dans le chapitre précédent, avaient constitué, pendant un siècle et demi, à peu près toutes nos connaissance théoriques sur l'aplatissement de la Terre.

Les deux limites fixées par Clairaut, indépendantes de toute hypothèse sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre, renfermaient l'inverse de l'aplatissement entre les nombres 230 et 577, basés uniquement sur la valeur de φ. Jusqu'au milieu du XIX[e] siècle, jusqu'à Bessel (1842), ces limites, quoique assez vagues, donnaient des résultats plus précis encore que les mesures géodésiques. On a vu dans le chapitre précédent, que ces nombres limites furent ramenés à 270 et 305, à la fin du XIX[e] siècle. Les mesures géodésiques commençaient à dépasser la précision de ces limites. Faye et Clarke donnaient 292 et 293, à quelques unités près.

Un simple changement de variable introduit par Radau, a permis alors à H. Poincaré de déterminer une nouvelle *limite fondamentale*, extrêmement remarquable $1 : e > 297,10$, également indépendante de toute loi de densité. Les limites étaient ramenées à 297 et 305, et excluaient les nombres de Clarke et Faye.

Les limites de Clairaut dépendaient uniquement du rapport de la force centrifuge et de l'attraction. Celle de Poincaré était basée en plus sur la valeur du rapport des moments d'inertie de la Terre, nombre J, formule (19) du chapitre précédent, nombre donné par les observations astronomiques de la précession. Le problème de Poincaré consiste à déterminer les limites de l'aplatissement, qui dépendent à la fois de φ et de J par l'équation (19) du chapitre précédent.

En 1912, Alex Véronnet dans sa Thèse ([1]) démontrait que la fonction η était toujours croissante pour la Terre. Sa valeur à la surface était un maximum, qui déterminait une *nouvelle limite fondamentale* de l'inverse de l'aplatissement $1 : e < 297,39$. Ce nombre était donc défini par ces deux limites à 3 dixièmes près, 0,3. De plus les calculs numériques et pratiques faits avec toutes les lois de densités connues (25 déterminations), donnent un résultat concordant, beaucoup plus précis encore, à 0,03 près.

Ce sont tous les résultats de ces calculs, théoriques et pratiques, qui sont exposés dans ce chapitre.

On voit que ces résultats arrivent à dépasser de nouveau, comme au temps de Clairaut, la précision des mesures géodésiques. Ils sont basés sur des mesures physiques, celle de la pesanteur par le pendule, nombre φ, et sur des mesures astronomiques, précession et nombre J, qui nous donnent 5 chiffres exacts. Il est remarquable de voir comment ces mesures, étrangères à la question de l'aplatissement, ont permis de le mesurer d'une façon précise par des déductions purement mathématiques.

Cependant les nombres obtenus ne le sont qu'en première approximation et sont basés sur certaines hypothèses, comme la rotation uniforme de la Terre. Nous verrons dans les chapitres suivants, les modifications apportées par l'étude des formules en seconde approximation et par les autres hypothèses. Si la Géodésie fixait la valeur de l'aplatissement en dehors des nombres déterminés par les premières hypothèses, il faudrait recourir aux autres hypothèses pour l'expliquer. Ce serait toujours une précision nouvelle introduite dans nos connaissances.

132. L'équation différentielle Clairaut-Radau. — L'équation différentielle du second ordre en e'' de Clairaut, formule (11) (n° **121**), a été ramenée à une équation différentielle du premier ordre par Radau, en posant

$$(1) \qquad \eta = \frac{re'}{e}, \qquad r\eta' = \eta - \eta^2 + \frac{r^2 e''}{e} + \ldots.$$

([1]) *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure de la Terre* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1912).

L'équation différentielle devient

$$\text{(2)}\qquad D r \eta' + D\eta^2 - D\eta + 6\rho\eta + 2rD' = 0.$$

On peut la simplifier encore en utilisant la fonction ζ analogue à η, introduite par Lipschitz et Tisserand [1]

$$\text{(3)}\qquad \zeta = -\frac{rD'}{D} = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right).$$

La seconde forme en ρ et D est dérivée de la première au moyen des formules (3)', Chapitre X, n° 119.

L'équation différentielle s'exprime alors au moyen des seules fonctions η et ζ

$$\text{(4)}\qquad r\eta' + \eta(\eta + 5) - 2\zeta(\eta + 1) = 0.$$

133. **La fonction de Radau. Ses limites, variation des aplatissements intérieurs.** — L'expression $-\frac{rD'}{D}$ avait été considérée par Poincaré et Callandreau. Il y a avantage à l'utiliser systématiquement. Au centre d'une masse hétérogène on a toujours $D = \rho = \rho_0$ et $\zeta = 0$ [2]. A la surface si $\rho_1 = 0$, et en dehors de la masse, on a $\zeta = 3$. Cette variable ζ est comprise entre 0 et 3, on a

$$\text{(5)}\qquad 0 < \rho < D, \qquad 0 < \zeta < 3.$$

La variable η a les mêmes limites 0 et 3. La formule (9) ou (10), Chapitre X, montre que e' et par conséquent η est positif dans l'hypothèse d'une rotation uniforme.

La première intégrale de (10) peut s'écrire $r^5 D\zeta$ d'après (6), Chapitre X, et la formule (10) devient

$$\text{(6)}\qquad (\zeta - \eta)e D r^5 = 3\int_r^0 a^5 e\, d\rho.$$

Le second membre est positif, car $d\rho$ croît de r à 0. On a donc

---

[1] *Journal de Crelle*, n° 62 et *Comptes rendus* t. 99, 1884, p. 577.

[2] Sauf toutefois si la densité varie infiniment vite vers le centre $\rho' = \infty$ vers le centre, $d\rho \neq 0$ et $D \neq \rho$. Alors ζ n'est pas nul. Ce cas a lieu quand la loi des densités a la forme $\rho\, r^n =$ const., au moins vers le centre. Poincaré n'a pas considéré ce cas particulier dans ses calculs théoriques.

$\zeta > \eta$. Finalement les limites de ζ et η sont données par la relation

$$(7) \qquad 0 < \eta < \zeta < 3.$$

L'inégalité $\eta < 3$ a été signalée par Poincaré, les autres par Callandreau ([1]). L'inégalité très importante $\eta < \zeta$ n'a pas été utilisée par Poincaré qui semble l'avoir ignorée.

Dans quels cas les limites sont-elles atteintes? Pour avoir $\eta = 0$, c'est-à-dire $e' = 0$, sur une surface quelconque, il faut, d'après (9), n° **121**, avoir $r^2 e_r = a^2 e$ ou $d\rho = 0$ pour toutes les couches intérieures à cette surface. La première hypothèse est impossible, car $a^2 e$ tend vers zéro au centre. Il faut donc avoir $d\rho = 0$, c'est-à-dire que toute la masse intérieure soit homogène. Réciproquement si toute la masse est homogène, on a $\rho = D$ et $\zeta = 0$ d'après (3), puis $\eta = \zeta = 0$ d'après (6).

Pour avoir $\eta = \zeta$, sur une surface d'axe polaire r, il faut d'après (6) que l'intégrale du second membre soit nulle, c'est-à-dire que les couches intérieures à cette surface soient sphériques $e = 0$, ou bien que l'on ait $d\rho = 0$. Le dernier cas se divise en deux autres. Ou bien il y a homogénéité, alors $\rho = D$ et $\zeta = 0$. C'est le premier cas. Ou bien il y a concentration totale, alors $\rho = 0$ et $\eta = \zeta = 3$. La réciproque est également vraie.

La formule (13), n° **122**, peut sécrire

$$(8) \qquad (3 - \eta) D e r^5 = 3 \int_0^r \rho \, d a^5 e.$$

Elle montre immédiatement que η reste inférieure à 3, le second membre étant essentiellement positif.

Au centre de la masse on a toujours $r e' = 0$ et $\eta = 0$, d'après la formule (10) (Chap. X). Mais il faut faire la même restriction que ci-dessus pour ζ. La valeur de η n'est pas nulle au centre si la densité y varie infiniment vite, $d\rho \neq 0$. Ce cas n'a pas été considéré par H. Poincaré, comme étant purement théorique.

A la surface la valeur de η sera donnée par (8), en prenant pour la valeur de l'intégrale la formule (18), n° **124**. On obtient alors à la surface

$$(9) \qquad \eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2.$$

([1]) *Bul. astr.*, t. V, p. 474.

On peut remarquer que les limites extrêmes de η_1, c'est-à-dire o et 3 redonnent les limites extrêmes de e données par Clairaut formule (8), n° 120, et dans les mêmes cas d'homogénéité ou de concentration totale. Sa valeur indique donc le degré de concentration. C'est pourquoi Callandreau a pu appeler η_1, *le paramètre de condensation* [1]. La quantité ζ en fonction de D', joue plus directement le même rôle.

Pour la Terre on a $\eta_1 = 0,58$ environ. On aura partout à l'intérieur $\eta < 1$ ou $\left(\frac{e}{r}\right)' < 0$ et la quantité $\frac{e}{r}$ sera partout décroissante du centre à la surface. C'est une loi plus précise que la deuxième de Clairaut sur la décroissance de l'expression $\frac{e}{r^3}$. Mais elle ne permet pas non plus de limiter l'aplatissement des couches centrales.

D'autre part de la formule $\eta < \zeta$ on déduit, d'après les valeurs (1) et (3) de η et ζ,

$$(10) \qquad e'D + eD' < 0 \qquad \text{ou} \qquad (eD)' < 0.$$

L'expression eD *est donc toujours décroissante du centre à la surface, ainsi que* e/r.

En désignant par 0 et 1 les valeurs des éléments au centre et à la surface on peut écrire

$$e_0 D_0 > e_1 D_1; \qquad \text{d'où} \qquad e_0 > \frac{D_1}{\rho_0} e_1,$$

car la densité moyenne centrale D_0 est égale à la densité centrale ρ_0. On a vu (Chap. X) que d'autres considérations permettent de limiter cette densité centrale et de lui assigner une valeur voisine du double de la densité moyenne D_1.

L'aplatissement vers le centre de la terre ne serait donc pas inférieur à la moitié de l'aplatissement superficiel. La variation de forme des différentes couches serait faible.

134. Variation de la fonction de Radau. Théorème fonda-

---

[1] *Bul. astr.*, mai 1889. La formule (7), Chapitre X, de Tisserand en y introduisant η_1 et ζ donne

$$0 < \eta_1 < \zeta_1 < 3,$$

c'est-à-dire la formule (7) ci-dessus, mais pour la surface seulement. Elle mettait déjà sur la voie des limites de η.

mental. — Il est extrêmement important pour déterminer les limites de l'aplatissement, de connaître le sens des variations de η, surtout de savoir s'il ne peut pas avoir à l'intérieur de valeurs plus grandes qu'à la surface. Cette étude commencée par Callandreau a été complétée par M. A. Véronnet.

L'équation (4) de Clairaut-Radau peut encore s'écrire

$$(11) \qquad r\eta' = 2\zeta + (2\zeta - 5)\eta - \eta^2 = (\eta - \beta)(\alpha - \eta).$$

Le second membre est alors un trinome du second degré en η qui, d'après les limites de ζ, a une racine positive α et une négative β dont les limites sont

$$0 < \alpha < \zeta < 3, \qquad -5 < \beta < -2.$$

Elles tendent vers 0 et -5 quand ζ tend vers 0; vers 3 et -2

Fig. 4.

quand ζ tend vers 3. Elle varient toujours dans le même sens que ζ. On a $\eta' = 0$ pour $\eta = \alpha$.

Comme ζ est compris entre η et 3 on voit immédiatement que $r\eta'$ reste compris entre les limites suivantes :

$$(12) \qquad \eta(\eta - 3) < r\eta' < (\eta + 2)(3 - \eta).$$

Portons les valeurs de η sur l'axe des x et $r\eta'$ sur celui des y, (*fig.* 4). Le premier membre de (12) sera représenté par la parabole ODC et le dernier par la parabole ABC. Comme on a η

positif, toute la région de variation sera comprise entre les deux paraboles ci-dessus et la partie OA de l'axe Oy, région limitée par un trait fort. Au-dessus de l'axe OC, on aura $r\eta'$ positif et η croissant, au-dessous $r\eta'$ négatif et η décroissant avec r.

Dérivons de nouveau l'équation de Clairaut-Radau (11), il vient

$$(13) \qquad r\eta'' + 2\eta'(\eta + 3) = 2(\zeta\eta)' + 2\zeta'.$$

La condition $\eta'' = 0$ sera déterminée par l'équation

$$\eta'(\eta + 3 - \zeta) = \zeta'(\eta + 1).$$

En intégrant directement de 0 à r, ou en considérant cette équation comme une équation linéaire, où η serait la fonction et ζ la variable, on obtient pour la courbe intégrale des *points d'inflexion* $\eta'' = 0$,

$$2\zeta(\eta + 1) = \eta(\eta + 6).$$

La constante est nulle, car pour $r = 0$ on doit avoir $\eta = \zeta = 0$, au moins dans le cas général.

Cette valeur portée dans l'équation Clairaut-Radau donne $r\eta' = \eta$. La ligne des points d'inflexion sera donc représentée dans la figure par la droite OF. La ligne des maximums et minimums $\eta' = 0$ sera l'axe OC.

Au centre on a $\eta = 0$, puis $\eta > 0$. La courbe des η part donc de l'origine en montant. Si elle ne coupe pas OF, où $\eta'' = 0$, elle reste montante et η reste croissant. C'est le cas de la Terre pour laquelle on a à peu près $\eta_1 = 0,5$ et, $\zeta_1 = 1,5$; d'où $r\eta'_1 = 1,75$. On a le point figuratif T et la courbe OT.

Le domaine de variation de $r\eta'$ et η comprend donc trois parties bien distinctes : 1° OABGO où l'on a $\eta'' > 0$, η' croissant et positif, η croissant; 2° OGCO où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant mais positif, η croissant; 3° enfin OCDO où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant et négatif, η décroissant. Il est facile de voir dès lors que la courbe de variation ne peut être qu'une courbe analogue à celle de OLMN, ou une portion d'une telle courbe selon que le point figuratif de la surface extérieure, analogue à T, tombe dans l'une ou dans l'autre de ces trois parties du domaine.

En résumé, si η' est positif à la surface, η est toujours croissant à l'intérieur, 1er et 2e cas, courbe TO ou MLO. Dans le cas con-

traire, $\eta'_1 < 0$, on a la courbe NMLO, et η, décroissant vers la surface, passe par un maximum M à l'intérieur, de là le théorème général dû à M. A. Véronnet : *Si η est croissant à la surface, il l'est dans toute la masse. S'il est décroissant à la surface, il aura un maximum à l'intérieur.*

Pour la Terre il suffit que la densité superficielle soit inférieure à 3,67, ce qui est certainement le cas, pour que η atteigne sa plus grande valeur à la surface. Ce résultat permet de déterminer une nouvelle limite de l'aplatissement très voisine de celle de Poincaré; n° **137** ci-dessous.

Pour Jupiter et Saturne les valeurs correspondantes de la densité superficielle, pour que ce même cas s'y trouve certainement réalisé sont 0,406 et 0,226, les densités moyennes étant 1,30 et 0,62.

Faisons $\eta' = 0$ dans l'expression de η'' (13). On a

$$(14) \qquad \eta'' = 2\zeta'(\eta + 1).$$

Si ζ' est toujours positif ou nul, c'est-à-dire ζ croissant ou constant, alors η est toujours croissant. Ce cas général comprend les trois cas particuliers étudiés par Callandreau, $\frac{\rho}{D}$ décroissant, η'' ou D'' négatifs.

Le cas limite ζ constant, donne $\eta' = 0$ et η constant, *cas limite*, qui est réalisé par la loi de densité

$$\rho r^n = \text{const.}, \qquad D r^n = \text{const.}, \qquad n = \zeta_1, \qquad e = e_1 r^{\eta_1}.$$

L'exposant n doit être égal alors à la valeur de ζ constant, et la loi des aplatissements est donnée par une formule analogue, où l'exposant de r est égal à la valeur constante de η.

135. L'équation de condition de Radau. — Radau a trouvé une expression de η, qui permet de rendre les valeurs de l'aplatissement à peu près indépendantes de la loi des densités.

Considérons la troisième des formules fondamentales du chapitre précédent, (19) (n° **124**), en e, φ et J

$$\frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 = J \int_0^1 \rho \, da^5.$$

Dans l'intégrale, remplaçons ρ par sa valeur en fonction de D

et D', on aura

$$(15) \qquad \int_0^1 \rho\, da^5 = \int_0^1 \mathrm{D}\, da^5 + \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{D}' a\, da^5 = \frac{5}{3}\mathrm{D}_1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \mathrm{D}\, da^5.$$

Il suffit d'intégrer par parties la seconde intégrale en D', avec $\mathrm{D}' da = d\mathrm{D}$.

On a encore identiquement, en dérivant par rapport à a, l'expression suivante :

$$(16) \qquad (a^5 \sqrt{1+\eta}\,\mathrm{D})' = \frac{5a^4\mathrm{D}}{\sqrt{1+\eta}}\left(1 + \eta + \frac{a\eta'}{10} + \frac{1+\eta}{5}\,\frac{a\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}\right),$$

a a la même valeur que r, en première approximation. En remplaçant $r\mathrm{D}'$ par ζ et $r\eta'$ par sa valeur tirée de l'équation de Clairaut-Radau on a

$$(17) \qquad (a^5\sqrt{1+\eta}\,\mathrm{D})' = \frac{5a^4\mathrm{D}}{\sqrt{1+\eta}}\left(1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2\right).$$

C'est une nouvelle forme de l'équation de Clairaut-Radau.

En intégrant cette expression de 0 à $r_1 = 1$, on obtient

$$(18) \qquad \mathrm{D}_1\sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}}\,\mathrm{D}\, da^5 = \mathrm{K}\int_0^1 \mathrm{D}\, da^5.$$

K désigne la valeur moyenne de l'expression en η placée sous le signe somme.

Il se trouve que cette expression a une variation assez faible, et même extrêmement faible pour les valeurs de η relatives à la Terre.

Portons cette valeur (18) dans (16) et celle-ci dans la formule (19) du chapitre précédent, on aura

$$(19) \qquad e + \frac{2}{5}\mathrm{J}\,\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\mathrm{K}} = \mathrm{J} + \frac{\varphi}{2}.$$

D'autre part le tableau de variation de K pour les valeurs de η comprises entre 0 et 3, en désignant par l'indice 1 les valeurs à la surface de la Terre, est

η	0	$\frac{1}{3}$	$\eta_1 = 0,58$	3
K	1	1,0075	$\mathrm{K}_1 = 0,9996$	0,8

$$\mathrm{K}' = \frac{\eta(1-3\eta)}{20(1+\eta)^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur de K croît d'abord de 1 à 1,00075, valeur maximum pour $\eta = \frac{1}{3}$, puis décroît ensuite à 0,8.

Radau considère que les valeurs de η_1, correspondant aux aplatissements donnés par les différentes mesures géodésiques, et qui allaient de $\frac{1}{292}$ à $\frac{1}{300}$, assignent à K une valeur qui ne diffère de l'unité que de 0,0004 et inférieure à e. Puisqu'on a négligé e^2 dans les calculs, on peut donc faire K = 1 dans (19) avec la même approximation.

Radau en déduit comme solution [1] : $\frac{1}{e} = 297$. C'est la seule valeur de l'aplatissement, qui puisse concorder avec les données expérimentales de la précession et de l'attraction, dans les limites de précision du problème.

Cela supposait implicitement que η conservait à l'intérieur une valeur voisine, ou inférieure, à celle de la surface, c'est-à-dire supposait que η était croissant du centre à la surface.

D'autre part on admettait à ce moment là (1885) la valeur $\frac{1}{292}$ de l'aplatissement que Faye en France et Clarke en Angleterre venaient de déterminer d'une façon concordante et qui semblait définitive. La valeur trouvée par Radau paraissait plutôt discordante et embarrassante.

136. La limite de Poincaré indépendante de toute loi des densités. — C'est un peu plus tard (1888) que Poincaré reprend cette démonstration [2] et montre qu'en dehors de toute hypothèse sur la valeur de η à l'intérieur ou à l'extérieur, c'est-à-dire en dehors de toute hypothèse sur la loi des densités et la constitution interne de la Terre, on avait, en vertu du maximum de K,

$$K \leqq 1,00075 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e} \geqq 297,10.$$

Cette valeur excluait les aplatissements donnés par Faye et Clarke.

(1) Radau, *Comptes rendus*, t. 100, 1885, p. 972, et *Bull. astr.*, t. II, p. 157. Roche avait déjà montré qu'avec la formule des densités de Legendre et la sienne la seule valeur d'accord était 1 : 298.

(2) *Comptes rendus*, t. 107, 1888, p. 398; et *Bull. astr.*, t. VI, p. 5 et 49.

Poincaré dans les *Figures d'équilibre d'un liquide en rotatio*, 1903, p. 96, montrait qu'on pouvait concilier la théorie et le observations soit par un calcul en seconde approximation en tenant compte de e^2, soit en admettant que la vitesse des couches intérieures n'est pas la même que celle de la surface, soit en admettant que la Terre est solide et solidifiée avec des vitesses différentes. Nous verrons l'examen de ces différentes hypothèses, faites en particulier par M. A. Véronnet, et les résultats qui s'en dégagent.

Poincaré en concluait même à cette époque : « L'hypothèse de la fluidité intérieure de la Terre n'est guère vraisemblable. » Il avait en vue sans doute les calculs de lord Kelvin sur la rigidité moyenne de la Terre égale à celle de l'acier, mais c'était avant les expériences modernes sur les métaux et qui montrent que la rigidité n'exclut pas une certaine fluidité sous de très hautes pressions.

Plus tard Poincaré se ralliera tout naturellement à la valeur de l'aplatissement déterminée par Helmert au moyen de l'hypothèse de la condensation $\frac{1}{e} = 297$ [1].

Il faut remarquer que l'hypothèse de la vitesse de rotation constante s'introduit dans la limite de Poincaré, en tenant compte de l'équation de Clairaut-Radau dans la formule (17) alors que les formules du chapitre précédent sont indépendantes de toute hypothèse sur la vitesse de rotation. Il suffira donc de compléter, dans ce sens, la formule (17) pour tenir compte de cette nouvelle hypothèse, *voir* Chapitre XIV.

137. Seconde limite de l'aplatissement indépendante de toute loi des densités. — Poincaré avait établi sa limite en montrant, qu'en dehors de toute hypothèse sur les densités, on avait $K \leq 1,00075$. On a vu, au n° **134**, que η est toujours croissant à l'intérieur, s'il l'est à la surface, ce qui a lieu pour la Terre. On en conclut que la valeur moyenne K dans (18) est supérieure à sa valeur K_1 à la surface pour $\eta = \eta_1$. A. Véronnet montre de plus que, dans les mêmes conditions, le premier membre de (19) ne peut avoir qu'*une solution* et l'aplatissement e une seule valeur. On obtient ainsi une *seconde limite* de l'aplatissement déterminée par la valeur $K = K_1$, en faisant $\eta = \eta_1$ dans (18).

(1) *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1911, Note A, p. 24.

La valeur réelle de e devra être comprise entre ces deux limites qui sont extrêmement voisines.

Elles sont données par les formules

$$(20) \qquad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{1,00075} = J + \frac{\varphi}{2} = e + \frac{2}{5} J \frac{1+\eta_1}{1 + \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1^2}.$$

D'après les valeurs adoptées, pages suivantes, $J + \frac{1}{2}\varphi$ est égal à 0,005 009 19. On calcule les valeurs du premier et du dernier membre de (20) pour différentes valeurs de e avec $\eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2$, formule (9). On obtient le tableau

$1 : e$..........	297,0.	297,1.	297,2.	297,3.	297,4.	297,5.
$K = 1,00075$ ...	0,005 009 84	9.17	8.49	7.81	7.11	6.45
$K = K_1$...	0,005 011 80	11.13	10.47	9.81	9.14	8.48

Ce qui donne, pour les limites,

$$297,10 < \frac{1}{e} < 297,39, \qquad \frac{1}{e} = 297,25 \pm 0,15.$$

En première approximation la valeur de $\frac{1}{e}$ se trouve donc déterminée à 0,3 près, indépendamment de toute hypothèse sur la variation des densités et la constitution interne de la Terre ([1]).

M. Hamy dans sa thèse (p. 48) en étudiant une Terre composée de trois couches seulement, avant les calculs sur les limites de l'aplatissement, avait déjà trouvé qu'il ne pouvait accorder l'aplatissement superficiel avec une loi quelconque des densités qu'en prenant

$$296,53 < \frac{1}{e} < 297,78.$$

Remarque I. — Les valeurs de e et de ses limites dépendent seulement des valeurs de φ et J. Les valeurs ci-dessus des limites

---

([1]) ALEX. VÉRONNET, *Rotation d'une masse hétérogène et figure de la Terre* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Chap. IV, 1912).

ont été déterminées pour

$$J + \frac{\varphi}{2} = 0{,}005\,009\,19, \qquad \frac{1}{J} = 305{,}31, \qquad \frac{1}{\varphi} = 288{,}38.$$

Elles dépendent de la précision des mesures sur φ et J.

On peut déterminer, par la formule (20), l'influence des écarts de φ et J sur les valeurs de e. Prenons la première des formules (20) en y faisant $K = 1$ pour simplifier, on a

$$e - \frac{1}{2}\varphi = J - \frac{2}{5} J\sqrt{1+\eta}, \qquad \eta = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2.$$

En prenant les variations de e, φ, J, et η fonction de φ et e, puis introduisant les variations des inverses pour plus de simplicité, on trouve

$$\left(e^2 - \frac{J\varphi}{2\sqrt{1+\eta}}\right)\delta\frac{1}{e} = J\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right)\delta\frac{1}{J} + \varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{J\varphi}{2e\sqrt{1+\eta}}\right)\delta\frac{1}{\varphi}.$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, prenant $1 : e = 297$, car il suffit de 2 ou 3 chiffres exacts, on obtient

$$\delta\frac{1}{e} = 0{,}787\,\delta\frac{1}{J} + 0{,}199\,\delta\frac{1}{\varphi}. \tag{21}$$

On voit qu'un changement de 0,1 sur les valeurs des inverses de φ et J modifierait de la même quantité l'inverse de l'aplatissement $1 : e$. On peut être assuré actuellement que l'écart possible n'atteint pas cette valeur, n° **164**.

Remarque II. — La seconde limite de l'aplatissement est obtenue en donnant à η sa valeur maximum, qui est celle de la surface. Cela revient à considérer cette valeur de η, comme *constante*, à l'intérieur de la Terre du centre à la surface, formule (18).

On peut, dans cette hypothèse, traiter le problème directement et retrouver la seconde limite de l'aplatissement. Comme η est constant, on a $\eta' = 0$. D'après (4) (n° **132**), la fonction ζ est également constante et la formule (3) donne en intégrant

$$\zeta = \zeta_1 = -\frac{rD'}{D} = -\frac{r}{D}\frac{dD}{dr}, \qquad D = D_1 r^{-\zeta_1}, \qquad \rho = \rho_1 r^{-\zeta_1}.$$

Ce sont les mêmes formules que celles de la fin du n° **134**.

Comme ζ est constant, la formule (3) montre que le rapport ρ D : l'est aussi, d'où l'expression de ρ, déduite de celle de D. Portons cette valeur de ρ dans l'intégrale de l'équation de Clairaut-d'Alembert (n° 135). L'intégration est immédiate et donne

$$e - \frac{1}{2}\varphi = \frac{3J}{5D_1}\int_0^1 \rho\, dr^5 = J\,\frac{\rho_1}{D_1}\,\frac{3}{5-\zeta_1} = J\,\frac{3-\zeta_1}{5-\zeta_1}.$$

On a remplacé $\rho_1 : D_1$ par ζ_1 d'après (3). En remplaçant ζ_1 par sa valeur en η_1 d'après (4) où l'on a fait $\eta' = 0$, on retrouve précisément la seconde formule (20) qui donne la seconde limite de l'aplatissement. Cette limite est ainsi tirée directement de la formule de Clairaut-d'Alembert sans passer par la transformation de Radau.

138. Calculs numériques de l'aplatissement par la méthode directe. Lois des densités de Legendre et Laplace. — On a vu au chapitre précédent comment on pouvait calculer, au moyen des formules (17), (18), (19), l'aplatissement des surfaces de niveau dès que l'on connaissait la loi des densités ρ. Chacune de ces formules donne une série de valeurs pour l'aplatissement superficiel e, quand on fait varier l'un des paramètres de la loi générale des densités, la densité superficielle ρ_1 par exemple. Les valeurs de chaque série se représentent par une courbe et les courbes se coupent au même point, lequel détermine l'aplatissement, qui vérifie à la fois les conditions de l'attraction et celles de la précession. La solution donne en même temps la valeur des paramètres de la loi des densités pour lesquels cet accord est réalisé. M. A. Véronnet a fait ces calculs pour toutes les lois de densité étudiées par les astronomes. *Voir* Chapitre XIV.

La formule (18) de Clairaut, n° 124, donne l'aplatissement en fonction de φ, rapport de la force centrifuge à l'attraction. La formule (17) de d'Alembert donne l'aplatissement en fonction de J, rapport des moments d'inertie, défini par la précession. On a donc ainsi une *méthode directe*, différente de celle qui vient de nous donner les deux limites, et qui était obtenue par l'application de la transformation de Radau à la combinaison des deux équations précédentes. La méthode de Radau donnait des limites très étroites de l'aplatissement, et cela sans intégration. La méthode

directe, plus longue, et plus pénible, vérifiera ces limites et montrera que l'aplatissement réel est renfermé dans des limites plus étroites encore.

Legendre et Laplace avaient étudié la loi de densité

$$m r \rho = \rho_0 \sin m r, \tag{22}$$

où le sinus permettait une discussion plus facile de l'équation différentielle de Clairaut (¹). La densité tend vers la valeur ρ_0 au centre, où la courbe a une tangente horizontale. A 0,3 du centre la courbe devient sensiblement linéaire jusqu'à la surface, m est un paramètre, exprimé en valeur de π, et r est la distance au centre exprimée de 0 à 1.

En donnant à m différentes valeurs, on obtient pour les inverses des aplatissements les trois séries de valeurs e, e', e'', données dans le tableau suivant pour les trois formules (17), (18), (19) :

m............	138°.	140°.	142°.	144°.	146°.
$1:e$...........	288,7	291,2	293,9	296,7	299,7
$1:e'$...........	299,1	298,5	297,9	297,3	296,6
$1:e''$...........	293,8	294,7	295,8	297,0	298,2

La valeur d'accord qui donne la solution unique relative à cette loi des densités est

$$1:e = 297,2, \qquad \rho_1 = 2,61.$$

La valeur de la densité superficielle est un peu forte. La première ligne du tableau avait déjà été donnée par Tisserand (²).

139. Lois des densités de Roche et Lipschitz. Limites remarquablement resserrées des aplatissements. — Roche avait déduit

(¹) Voir Tisserand, *Mécanique céleste*, t. 2, p. 237. Legendre avait considéré cette loi comme solution simple de cette équation, Laplace comme donnée par une loi de compressibilité d'une masse homogène avec la profondeur.

(²) G. H. Darwin avait déjà remarqué en 1876 que cette loi ne permettait pas d'expliquer les aplatissements de Jupiter et de Saturne, car l'expression $\frac{5}{2}\frac{\varphi}{e}$ calculée d'après (22) ne variait que de 2 à 3,29 alors qu'elle atteignait près de 3,50 pour Jupiter et Saturne. Ceci montrait déjà que cette formule n'était pas suffisamment souple. Nous savons maintenant que l'expression ci-dessus est égale à $\eta_1 + 2$ et varie de 2 à 5, formules (7) et (9). *On an Oversight in the mecanique celeste* (*Montly Not.*, t. 37).

de considérations sur la compressibilité une loi de densité en r^2 où la courbe des densités est une parabole ayant son sommet au centre. Lipschitz a étudié une loi plus générale où l'exposant de r est un paramètre variable n. Elle donne la loi de Roche quand on fait $n=2$. Ces lois s'écrivent

$$(23) \qquad \rho=\rho_0(1-\alpha r^2), \qquad \rho=\rho_0(1-\alpha r^n).$$

On obtient la densité superficielle en faisant $r=1$.

On obtient ρ_0 en calculant la densité moyenne D_1 dont la valeur est 5,52, formule (3), Chapitre X, n° 119 et n° 165.

On voit facilement ainsi que l'on doit faire $n>7$ pour que la densité superficielle reste positive et n compris entre $\frac{1}{2}$ et 3 pour que cette densité soit comprise entre 2 et 3, ce qui a sûrement lieu. On peut donc limiter les calculs à quelques valeurs de n comprises entre $\frac{1}{2}$ et 7. Le tableau suivant donne pour chaque valeur de n la valeur d'accord pour l'aplatissement et la densité superficielle correspondante ρ_1 :

n.......	$\frac{1}{2}$.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	6,75.
$1:e$......	297,187	171	173	184	19	20	21	21
ρ_1.......	2,96	2,72	2,25	1,78	1,30	0,83	0,36	0,0

On n'a écrit que les décimales pour l'inverse de l'aplatissement. Ces décimales ne varient que de 17 à 21, c'est-à-dire de 4 centièmes seulement de l'inverse de l'aplatissement.

Pratiquement la densité superficielle étant comprise entre 2 et 3, la variation correspondante de $1:e$ est seulement de 0,016

$$297,171<\frac{1}{e}<297,187, \qquad \frac{1}{e}=297,18\pm0,01.$$

On peut dire que pratiquement l'inverse de l'aplatissement est déterminé à un centième près, avec cinq chiffres exacts. La précision des calculs théoriques qui donnait déjà des limites extrêmement resserrées, à 0,3 près, est donc encore bien dépassée par les calculs pratiques.

La formule de Roche $n=2$ donnerait $\rho_1=2,25$, avec $n=3$ on aurait $\rho_1=1,78$. Il semble bien que la densité superficielle doit

être comprise entre ces deux valeurs. Le paramètre n, l'exposant de r serait compris pratiquement entre 2 et 3. La formule de Roche, la plus simple, représenterait assez bien toutes les données.

En faisant $n = 1$, en admettant un accroissement linéaire de la densité avec la profondeur, on aurait $\rho_1 = 2,72$. Cette valeur moyenne de la densité superficielle moyenne, mers et continents, paraît trop forte, dépasse les nombres donnés par le pendule et plutôt voisins de 2.

140. Calculs des aplatissements avec d'autres lois de densités. Vérification des limites resserrées. — Les lois plus compliquées

$$(24) \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^2, \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^3$$

donnent 297,183 et 297,15 pour l'inverse de l'aplatissement, valeurs très voisines des précédentes, elles donnent 2,632 et 2,734 pour la densité superficielle, valeurs également trop fortes.

Or ces lois de densités donneraient pour les courbes de densité une inflexion vers la surface. Elles s'écarteraient de la loi de Roche en sens inverse des lois $n = 1$ et $n = \frac{1}{2}$. Ceci confirme bien que la loi de Roche est une loi moyenne assez bien représentative de l'état interne de la terre, au moins en première approximation.

Les lois ci-dessus au contraire, formules (24), permettent seules de rendre compte des aplatissements de Jupiter et de Saturne. Elles montrent que l'état interne de ces planètes n'est pas analogue à celui de notre planète.

Tisserand avait déjà étudié la loi de Lipschitz et ses calculs, quoique simplifiés et réduits à quelques termes du développement, permettaient également le calcul de l'aplatissement par une autre voie. M. A. Véronnet trouve ainsi des valeurs comprises entre 297,17 et 297,13 pour ρ_1 compris entre 2 et 3.

M. Lévy [1] pour essayer de faire concorder l'aplatissement de Faye avec les données de la précession avait introduit un paramètre

---

[1] *Comptes rendus*, t. 106, 1888, p. 1270, 1314, 1375. Une autre formule de M. Radau rentre dans celle de M. Lévy (*Bull. astr.*, t. 2, p. 157). Les lois des formules (24) en sont également des cas particuliers.

de plus dans la loi de Lipschitz et étudié la loi

$$(25) \qquad D = \rho_0(1 - \alpha r^n)^{n'}.$$

D est la densité moyenne, avec $n' = 1$, on aura la loi de Lipschitz; on retrouve par cette formule les mêmes résultats qu'avec les formules de Tisserand avec des nombres légèrement relevés de 0,01 à 0,02 et compris entre 297,19 et 297,14 pour ρ_1 compris entre 2 et 3.

Enfin la loi

$$(26) \qquad \rho r^n = \rho_1 r_1^n = \text{const.}$$

donne

$$e = e_1 r^{\eta_1},$$

si l'on fait $n = \zeta_1$. Il en résulte que η et ζ sont constants à l'intérieur et l'on retrouve l'aplatissement limite 297,393, qui avait été déterminé précisément dans l'hypothèse $\eta = \eta_1$. Cette loi avait déjà été considérée par Clairaut, puis étudiée par G. H. Darwin.

On voit en résumé que toutes les lois de densité donnent des aplatissements tout à fait concordants à trois centièmes près et que l'on peut prendre en première approximation

$$1 : e = 297,17 \pm 0,03.$$

Les limites théoriques étaient (21)

$$1 : e = 297,25 \pm 0,15.$$

Mais, par malheur, les calculs de première approximation ne donnent les valeurs qu'aux unités près. La précision des limites théoriques et des limites pratiques, à quelques dixièmes et quelques centièmes près, est donc tout à fait illusoire. Cependant leur précision est telle qu'il fallait à tout prix la vérifier et essayer de la conserver en poussant les calculs jusqu'à la seconde approximation. Nous verrons au chapitre suivant que la précision du résultat a été conservée en modifiant légèrement la valeur des limites.

141. Recherches antérieures de Tisserand qui préparaient la solution. — Dans un travail de 1884 Tisserand essayait de concilier les données de la précession avec l'aplatissement déduit par Faye et Clarke des mesures géodésiques, $1 : e = 292$. Il constatait,

après Roche, la difficulté de cette conciliation. L'année suiv[ante] Radau, par la transformation étudiée ci-dessus, montrait que la seule valeur conciliable avec la précession était $1 : e = 297$. Mais il se présentait différentes hypothèses. On s'étonne cependant qu'il ait fallu attendre trois ans la Note de H. Poincaré sur la limite inférieure de l'aplatissement, résultat qui paraissait évident. L'étude de la suite de ces travaux permet de se rendre compte des difficultés et de la part de chacun.

Roche avait montré (¹), dans un Mémoire de 1881, qu'en appliquant sa loi des densités à la Terre on ne pouvait pas concilier l'aplatissement théorique donné par l'attraction et la précession, avec l'aplatissement déterminé par Clarke et Faye. Il en concluait que la Terre devait être solide. Mais on objectait que sa loi n'était peut-être pas assez générale.

En 1884, dans une note à l'Académie, Tisserand démontre d'abord la formule (7) du chapitre précédent, qui donne pour l'aplatissement deux valeurs limites, dont la plus grande est plus petite que celle de Clairaut. L'inverse de l'aplatissement devait être compris entre 230 et 403. L'écart était encore considérable.

Dans une seconde note, puis un article du *Bulletin astronomique* et un mémoire inséré dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, il étudie la nouvelle loi de densité donnée par Lipschitz, avec trois paramètres arbitraires et qui semblait ainsi pouvoir représenter toutes les données, beaucoup mieux que celle de Roche à deux paramètres seulement.

Il démontre, en même temps que Lipschitz, que cette loi, portée dans la formule générale (18) de Clairaut, donnait la loi des aplatissements sous la forme d'une série hypergéométrique.

Il arrive à résoudre cette équation transcendante d'une manière très simple et à exprimer l'équation de condition (19) entre e, φ, J sous la forme

$$5\left(e - \frac{\varphi}{2}\right) = (3 - R)J, \tag{27}$$

(¹) Dans le cas de la loi des densités de Legendre et Laplace il démontre que $1 : e$ doit être compris entre 296 et 298. Il suppose ensuite la Terre formée d'un noyau central et de deux enveloppes, développe les formules correspondant à la précession et à l'attraction et montre que dans ce cas le seul aplatissement possible était $1 : 294,3$ (*Acad. de Montpellier*, 1881).

où R s'exprime par une série, qui est fonction de e, ρ_1 et D_1, c'est-à-dire de l'aplatissement, de la densité superficielle ρ_1, et de la densité moyenne.

Le résultat remarquable est que cette expression de R est indépendante du paramètre n de la formule de Lipschitz, c'est-à-dire indépendante de la forme même de la loi des densités, pour ne dépendre que de sa valeur à la surface et dans l'ensemble. Il était évident dès lors que la formule de Lispschitz ne réaliserait pas mieux l'accord que celle de Roche qui en était un cas particulier.

Autre résultat remarquable, cette expression de R dépendait assez peu de la valeur de ρ_1 elle-même, seulement par le quatrième terme du développement. En prenant pour e la valeur admise alors d'après les mesures géodésiques, soit 1/292, Tisserand trouvait pour l'expression de I, définie par

$$I\left(e - \frac{\varphi}{2}\right) = J, \tag{28}$$

des valeurs extrêmement voisines, à 0,001 près, quel que soit ρ_1 et égales à $1{,}987 \pm 0{,}001$. Les valeurs connues de e, φ, J donnaient au contraire 1,955 au moyen de (28). L'accord était impossible [1].

Les valeurs de e, φ, J paraissaient alors déterminées avec assez de précision pour que cet accord parut réellement impossible. Tisserand ne se demande pas si l'aplatissement pourrait être modifié ni quelle serait la valeur qui permettrait l'accord. D'autre part la loi de Lipschitz lui paraît assez générale pour qu'il considère ce résultat comme à peu près indépendant de la loi des densités.

Il suppose donc qu'on arrive à démontrer que l'accord est impossible. Il indique que Roche a cru pouvoir en déduire que la Terre devait être solide. Pour lui il en conclut seulement que les couches internes de la Terre peuvent être discontinues, auquel cas la théorie de Clairaut ne s'y appliquerait plus. Poincaré montrera plus tard que l'équation de Clairaut serait encore vraie. D'ailleurs une discontinuité physique n'est jamais une discontinuité mathématique et une loi de variation rapide peut toujours traduire, aussi parfaitement qu'on voudra, une discontinuité physique dans la densité par exemple.

---

[1] Tisserand établissait également une valeur limite relative à la précession, mais une seule $I < 2{,}0388$.

On peut remarquer que l'expression R de Tisserand traduit simplement la valeur de l'intégrale de ρda^5 dans la formule (19) du chapitre précédent et par conséquent qu'elle traduit aussi la valeur de l'expression $\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}$ de Poincaré dans la formule (19) ci-dessus. En introduisant η et ζ dans les formules de Tisserand, on a

$$(29) \qquad R' = 1 + \frac{1}{2} R = 1 + \frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_1^2}{2^3} + \frac{2\zeta - 1}{\zeta} \frac{\eta_1^3}{2^5} \dots$$

Les premiers termes du développement sont bien les mêmes et ζ ou ρ_1 n'apparaît que dans le quatrième terme.

M. Lévy confirmera simplement ces résultats (1888) par l'étude de sa loi contenant un paramètre de plus que la loi de Lipschitz. Ce paramètre n'apparaît en effet que dans le terme en η^5 du développement de R et ne modifie pas sensiblement les résultats.

Les lois de densités à deux paramètres (Roche), à trois paramètres (Lipschitz), plus tard à quatre paramètres (Lévy), ne parviennent pas à réaliser l'accord entre les mesures géodésiques de l'aplatissement et les mesures astronomiques de la précession.

142. Calculs de Radau et Callandreau. Valeur théorique de l'aplatissement. — Quelques mois après les travaux de Tisserand, Radau (1885) (1) transforme l'équation différentielle de Clairaut, au moyen de sa variable η. Il transforme du même coup l'équation de condition (19) entre e, φ, J, précisément sous la forme indiquée plus haut par la formule (18), mais par malheur il transforme tout de suite l'expression en η pour montrer qu'elle reste voisine de 1, et sans parler de son maximum. Il considère η comme « *vraisemblablement* compris entre 0 et η_1 ». Il montre que l'expression en η ne diffère de 1 que par des valeurs de l'ordre de l'aplatissement, de l'ordre des valeurs négligées en première approximation. Il conclut très logiquement que la seule valeur acceptable pour l'inverse de l'aplatissement est 1/297.

C'est lui qui a *déterminé pratiquement* cette seule valeur acceptable de l'aplatissement, comme le reconnaîtra Poincaré. Mais ce sera Poincaré qui le premier fera ressortir que, par le maximum

(1) *Comptes rendus*, t. 100, p. 972. Note reproduite dans le *Bull. Astr.*, t. 2, p. 157.

de K, s'introduit une *limite mathématique*, indépendante de toute condition et susceptible d'une approximation aussi grande qu'on voudra, et non pas seulement d'une valeur de première approximation.

Radau montrait dans la même note que l'expression I de Tisserand prenait bien la valeur 1,987, la seule acceptable avec l'aplatissement $1:e = 292$ alors que la précession exigeait 1,955.

Il montrait encore que l'équation de Clairaut pouvait se mettre aussi sous la forme

$$(30) \qquad (D\sqrt{1+\eta})' = -\frac{5\eta+\eta^2}{2r\sqrt{1+\eta}}D = -\frac{\eta(5+\eta)}{2r(1+\eta)}(D\sqrt{1+\eta}),$$

mais il ne déduisait aucun résultat de cette nouvelle forme

Callandreau s'occupe de la question à la même époque (1885). Il étend d'abord les conclusions de Tisserand en montrant que toutes les lois de densité pour lesquelles la concavité de la courbe est tournée vers le bas, $\rho'' < 0$, ne permettent pas de concilier les données de la précession avec l'aplatissement géodésique 1 : 292. Dans une seconde note il étend la condition précédente au cas où l'expression $\rho : D$ est décroissante [1].

Quelques mois plus tard, après la publication de la note de Radau, Callandreau reprend la question. Il indique que ses calculs de la note précédente permettent de déterminer une limite inférieure de l'inverse de l'aplatissement égale à 295, en admettant les conditions physiques très larges qu'il a envisagées. Il indique également, qu'on peut prendre comme limite supérieure 306, en dehors de toute hypothèse sur les densités. C'est sans doute la limite $e > J$ relative aux moments d'inertie, n° 125.

Il utilise alors la transformation de Radau pour déterminer une valeur plus stricte. Il met pour la première fois en évidence le maximum de $K = 1{,}0008$ pour $\eta = \frac{1}{3}$. Il montre que la seconde limite 306 donne

$$\eta < \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad K > 0{,}9984,$$

toujours dans l'hypothèse où η est toujours croissant.

Il en déduit que $e = 1:298$ dans les limites de variation de η et

---

(1) *Comptes rendus*, t. 100, p. 37 et 163.

quelle que soit la loi des densités. C'est ce qu'il appelle la « *valeur théorique* » de l'aplatissement. Mais, comme Radau, il n'indique que la valeur moyenne de l'aplatissement, sans parler des deux limites théoriques qu'il pouvait déduire de ses calculs. C lui paraissaient sans doute trop rapprochées pour être tinguées.

Il aborde incidemment la solution de l'antinomie. Il indique d'abord que tout récemment Helmert a trouvé pour l'aplatissement géodésique la nouvelle valeur 1 : 299, qui cadrerait à peu près avec la précession. Il donne une autre solution, c'est qu'il faudrait prendre les données au moment de la solidification. Il faudrait considérer la Terre comme solide et solidifiée dans des conditions différentes. Nous verrons plus loin les résultats donnés par cette hypothèse. Les marées de l'écorce, inconnues alors, nous ont appris que l'écorce solide elle-même possède assez de souplesse pour se plier aux forces variables dans les vingt-quatre heures. Elle doit nécessairement être en équilibre hydrostatique avec les forces permanentes, comme la force centrifuge qui produit l'aplatissement.

143. Calculs de H. Poincaré sur la limite mathématique. — C'est trois ans plus tard que M. Lévy publie son travail sur sa loi à quatre paramètres où il étend à cette loi les résultats de Tisserand et confirme pratiquement les résultats de Radau et de Callandreau (1).

C'est sans doute ce travail, ainsi que la thèse de M. Hamy, qui ramène l'attention de Poincaré sur la question. C'est alors qu'il publie sa note où il considère explicitement le maximum de la valeur moyenne de K et montre par là qu'on a $1 : e > 297$ et « qu'aucune hypothèse sur la loi des densités ne peut satisfaire aux observations », en admettant $1 : e = 292$. « Je m'abstiens de toute tentative d'interprétation »; ajoute-t-il. Il indique seulement les solutions possibles : supposer des mouvements intérieurs différents (G. H. Darwin), des irrégularités de surface (Faye), ou reprendre les observations. Il ne parle pas de la nouvelle détermination de l'aplatissement donnée par Helmert et signalée déjà par Callan-

(1) *Comptes rendus*, t. 106, p. 1270, 1314, 1375.

dreau. Il ne s'y ralliera que plus tard. Les astronomes tenaient toujours pour Faye et Clarke.

Poincaré revient sur la même question l'année suivante dans un travail du *Bulletin astronomique* (1889). Rappelant les travaux récents de Stieltjes, sur la limite de la densité centrale, de Tisserand sur l'invariance de I, de Radau sur η et la transformation de l'équation de Clairaut, de Callandreau sur $\eta < 3$ et $\rho'' < 0$, il étudie la question : « Serait-il possible de satisfaire aux observations en renonçant à l'hypothèse que η est constamment croissant ? » Si cela est impossible quelle sera la loi des densités qui donnera l'aplatissement maximum ?

Il étudie longuement des courbes de densité, puis montre comme dans la note ci-dessus la limite de $1 : e = 297$ indépendante de toute hypothèse sur les densités ou sur η. Il détermine ensuite la loi des densités qui correspond le mieux à la condition indiquée. C'est une expression algébrique assez compliquée en η, mais Poincaré indique lui-même qu'elle a peu d'importance, parce que toutes les lois de densités donneront à peu près les mêmes résultats. Il montre que cette loi correspond précisément au minimum de I et que le maximum absolu de cette fonction est précisément celui qui a été déterminé par Tisserand :

$$(31) \qquad \mathrm{I}'\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) = e, \qquad \mathrm{I}'' = 2,0288.$$

Il serait atteint pour $e = \mathrm{J}$ dans le cas des couches homothétiques
éité.

t ainsi mis en évidence et précisé une nouvelle
tique de l'aplatissement indépendante de toute loi
susceptible d'être examinée en seconde approxima-
erse de l'aplatissement devait être plus grand que 297,10.
e de M. A. Véronnet indiquait qu'il devait être plus petit
97,4.

voit quel était le chemin parcouru depuis Clairaut qui avait assigné à l'inverse de l'aplatissement les deux limites, formules (8) (Chap. X),

$$\frac{\varphi}{2} < e < \frac{5}{4}\varphi \qquad \text{ou} \qquad 230 < \frac{1}{e} < 577.$$

La formule (7) (Chap. X) de Tisserand abaissait la limite

supérieure à 430, puis la considération des moments d'inertie et de la précession la ramenait à 305,3 pour $e = J$, à 270,3 pour l'autre limite.

Callandreau montrait ensuite que la limite inférieure pouvait être ramenée assez près de cette dernière, au moins dans les cas très étendus de lois de densités étudiées par lui. L'inverse de l'aplatissement était compris entre 295 et 305,3.

Actuellement l'intervalle est réduit à 0,3 et même pratiquement à 0,03. C'est une précision de 0,001 et même de 0,0001. Il restera à voir ce que deviennent ces limites en seconde approximation et avec des hypothèses autres que celles de Clairaut.

144. Autres calculs de Callandreau sur certaines expressions pratiquement invariantes. — Callandreau revient sur ces questions et la même année, dans le *Bulletin astronomique*, il démontre

$$\eta < \zeta \qquad \text{et} \qquad \rho_0 > D_1 \sqrt{1 + \eta_1}; \tag{32}$$

cette dernière formule ayant déjà été démontrée par Radau. Puis, dans un long mémoire inséré dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, il étudie les différents invariants de Tisserand en poussant la précision à la seconde approximation.

Les équations relatives aux moments d'inertie n° 123 permettent d'écrire

$$A - B = \frac{8}{15}\pi \int_0^1 \rho \, da^5 e = \frac{8}{9}\pi D_1 r^5 \left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) \tag{33}$$

ou

$$\frac{A - B}{M} = \frac{2}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) r_1^2. \tag{34}$$

Cette dernière expression, entre la masse et la différence des moments d'inertie, est indépendante de la loi des densités et ne dépend que des données superficielles.

En désignant par g_0 la pesanteur à la surface, en prenant la valeur de g_0 en première approximation devant e, la formule (33) peut encore s'écrire

$$A - B = \frac{2}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) \frac{g_0 r_1^4}{f}, \tag{35}$$

f étant la constante de la gravitation.

dreau. Il ne s'y ralliera que plus tard. Les astronomes tenaient toujours pour Faye et Clarke.

Poincaré revient sur la même question l'année suivante dans un travail du *Bulletin astronomique* (1889). Rappelant les travaux récents de Stieltjes, sur la limite de la densité centrale, de Tisserand sur l'invariance de I, de Radau sur η et la transformation de l'équation de Clairaut, de Callandreau sur $\eta < 3$ et $\rho'' < 0$, il étudie la question : « Serait-il possible de satisfaire aux observations en renonçant à l'hypothèse que η est constamment croissant ? » Si cela est impossible quelle sera la loi des densités qui donnera l'aplatissement maximum ?

Il étudie longuement des courbes de densité, puis montre comme dans la note ci-dessus la limite de $1 : e = 297$ indépendante de toute hypothèse sur les densités ou sur η. Il détermine ensuite la loi des densités qui correspond le mieux à la condition indiquée. C'est une expression algébrique assez compliquée en η, mais Poincaré indique lui-même qu'elle a peu d'importance, parce que toutes les lois de densités donneront à peu près les mêmes résultats. Il montre que cette loi correspond précisément au minimum de I et que le maximum absolu de cette fonction est précisément celui qui a été déterminé par Tisserand :

$$\text{(31)} \qquad I'\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) = e, \qquad I'' = 2{,}0288.$$

Il serait atteint pour $e = J$ dans le cas des couches homothétiques ou de l'homogénéité.

Poincaré avait ainsi mis en évidence et précisé une nouvelle limite mathématique de l'aplatissement indépendante de toute loi de densité et susceptible d'être examinée en seconde approximation. L'inverse de l'aplatissement devait être plus grand que 297,10. La limite de M. A. Véronnet indiquait qu'il devait être plus petit que 297,4.

On voit quel était le chemin parcouru depuis Clairaut qui avait assigné à l'inverse de l'aplatissement les deux limites, formules (8) (Chap. X),

$$\frac{\varphi}{2} < e < \frac{5}{4}\varphi \qquad \text{ou} \qquad 230 < \frac{1}{e} < 577.$$

La formule (7) (Chap. X) de Tisserand abaissait la limite

supérieure à 430, puis la considération des moments d'inertie et de la précession la ramenait à 305,3 pour $e = J$, à 270,3 pour l'autre limite.

Callandreau montrait ensuite que la limite inférieure pouvait être ramenée assez près de cette dernière, au moins dans les cas très étendus de lois de densités étudiées par lui. L'inverse de l'aplatissement était compris entre 295 et 305,3.

Actuellement l'intervalle est réduit à 0,3 et même pratiquement à 0,03. C'est une précision de 0,001 et même de 0,0001. Il restera à voir ce que deviennent ces limites en seconde approximation et avec des hypothèses autres que celles de Clairaut.

144. Autres calculs de Callandreau sur certaines expressions pratiquement invariantes. — Callandreau revient sur ces questions et la même année, dans le *Bulletin astronomique*, il démontre

(32) $$\eta < \zeta \quad \text{et} \quad \rho_0 > D_1\sqrt{1+\eta_1};$$

cette dernière formule ayant déjà été démontrée par Radau. Puis, dans un long mémoire inséré dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, il étudie les différents invariants de Tisserand en poussant la précision à la seconde approximation.

Les équations relatives aux moments d'inertie n° **123** permettent d'écrire

(33) $$A - B = \frac{8}{15}\pi \int_0^1 \rho\, da^5 e = \frac{8}{9}\pi D_1 r^5 \left(e - \frac{1}{2}\varphi\right)$$

ou

(34) $$\frac{A - B}{M} = \frac{2}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) r_1^2.$$

Cette dernière expression, entre la masse et la différence des moments d'inertie, est indépendante de la loi des densités et ne dépend que des données superficielles.

En désignant par g_0 la pesanteur à la surface, en prenant la valeur de g_0 en première approximation devant e, la formule (33) peut encore s'écrire

(35) $$A - B = \frac{2}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right)\frac{g_0 r_1^4}{f},$$

f étant la constante de la gravitation.

Le potentiel d'un sphéroïde hétérogène quelconque peut s'écrire en négligeant les termes du second ordre

$$(36)\quad V = f\left[\frac{M}{r} - \frac{3}{2}\frac{A-B}{r^3}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right] = f\frac{M}{r}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{A-B}{Mr^2}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right].$$

En tenant compte de la formule (34) ce potentiel s'écrira, si la surface est en équilibre, (Hamy, deuxième mémoire)

$$(37)\qquad V = f\frac{M}{r}\left[1 - \frac{e - \frac{1}{2}\varphi}{r^2}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right],$$

expression indépendante de la loi des densités et dépendant seulement de e et ρ. C'est d'ailleurs un cas particulier du *théorème de Stokes*, d'après lequel le potentiel extérieur à une surface équipotentielle ou de niveau ne dépend que de cette surface et non de la répartition des masses à l'intérieur. On en déduit que la formule de Clairaut (27) (Chap. XIII), relative à la variation de la pesanteur à la surface, et dépendant seulement de la variation de potentiel, est indépendante de l'hypothèse d'une répartition des couches en équilibre hydrostatique.

L'un des moments d'inertie peut s'écrire en prenant $\lambda^2 = 2e$ et négligeant e^2,

$$(38)\qquad B = \frac{8}{15}\pi\int_0^{r} \rho\, da^5 + \frac{8}{5}\pi\int_0^{r} \rho\, da^5 e.$$

La seconde intégrale est donnée par (18) (Chap. X) en fonction de e et φ. La première peut s'écrire par la transformation de Radau et la fonction K

$$(39)\qquad \int_0^1 \rho\, da^5 = \frac{D_1}{3}\left(5 - \frac{2}{K}\sqrt{1+n_1}\right).$$

L'expression B : M ne dépend donc des densités que par la valeur de K qui reste voisine de 1.

Callandreau a vu l'importance qu'il y avait à savoir si ces invariants le restaient en seconde approximation en tenant compte de e^2 et la plus grande partie de son mémoire est consacrée aux calculs de seconde approximation. M. A. Véronnet les a repris pour les appliquer à la question des limites de l'aplatissement. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de ces calculs.

— On développe la formule (18) du Chapitre VIII, en conservant seulement les termes en l^2, λ^2, l^4, λ^4, qui correspondent à e et e^2, on a

$$(1) \qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_r^0 \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}l^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2 l^2 + \frac{6}{7}l^4\right)d\rho$$
$$+\int_1^r \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right)d\rho,$$

$$(2) \qquad \lambda^2 = \frac{a^2-c^2}{c^2} \qquad l^2 = \frac{a^2-c^2}{c^2+u} = \frac{c^2}{c^2+u}\lambda^2,$$

λ_r^2 est la valeur de λ^2 sur la couche de rayon polaire r, par rapport à laquelle se fait l'intégration. La valeur de l, par rapport aux coordonnées x, y, z du point considéré, est donnée par (27), n° 97. En posant $\frac{z^2}{r^2} = \cos^2\theta$ et $\frac{c^2}{r^2}\lambda^2 = \beta^2$, où θ est la colatitude, où c est l'axe polaire d'une couche quelconque et r l'axe polaire de la couche où se trouve le point considéré, n° 94, *remarque*, cette formule devient

$$(3) \qquad l^4\cos^2\theta + (1+\lambda_r^2\sin^2\theta - \beta^2)l^2 - \beta^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en l^2. La racine positive seule convient. En développant et négligeant λ^6, on a

$$(4) \qquad l^2 = \beta^2[1-(\lambda_r^2-\beta^2)\sin^2\theta]\ldots, \qquad l^3 = \beta^3\left[1-\frac{3}{2}(\lambda_r^2-\beta^2)\sin^2\theta\right]\ldots.$$

En portant cette valeur dans l'équation (1), les l^2 sont remplacés par β^2, et il s'ajoute aux deux intégrales un terme du second ordre en $\sin^2\theta$

$$(5) \qquad -\frac{3}{2}\sin^2\theta\int_r^0(\lambda_r^2-\beta^2)^2\frac{c^3}{r^3}d\rho = -\frac{3}{2}\sin^2\theta\,.\,\text{A}.$$

En intégrant par parties, et remarquant que $\beta_r^2 = \lambda_r^2$, on obtiendra, sous la forme classique,

$$(6) \qquad \frac{\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r \rho\, d\frac{c^3}{r^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4\right)$$
$$+\int_{r}^1 \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right)$$
$$-\frac{3}{2}\sin^2\theta\int_0^r \rho\, d\frac{a^3}{r^3}(\lambda_r^2-\beta^2)^2.$$

théoriques. Comme c'est une correction de seconde approximation en λ^4, on peut considérer les ellipsoïdes comme des couches sphériques de rayon c et de densité variable $\zeta\, d\rho$. Le potentiel de ces couches se calcule au moyen des fonctions sphériques. On a d'abord

$$(10) \qquad V = f\int \frac{dm}{r'}, \qquad dm = \rho c^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

L'intégrale est étendue à tout le volume. On désigne par c, θ, ψ les coordonnées polaires et dm la masse du point attirant variable, par r, θ_r, ψ_r les coordonnées du point fixe pour lequel on calcule le potentiel, et r' la distance des deux points. On aura

$$(11) \qquad \frac{1}{r'} = (c^2 + r^2 - 2cr\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} + \frac{c}{r^2} X_1(\cos\gamma) + \frac{c^2}{r^2} X_2(\cos\gamma) + \ldots,$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_r + \sin\theta\sin\theta_r\cos(\psi - \psi_r).$$

D'autre part, les polynomes de Legendre X_n, en θ, ψ et en θ_r et ψ_r, peuvent s'écrire d'après la théorie des fonctions sphériques,

$$(12) \qquad X_n(\cos\gamma) = X_n(\theta)\, X_n(\theta_r) + f(\theta, \theta_r)\cos(\psi - \psi_r).$$

La masse élémentaire de la couche de déformation, masse dm définie par ζ, $d\theta$, $d\psi$ s'écrira

$$dm = - c^2 \zeta\, d\rho . \sin\theta\, d\theta . d\psi = - c^3 \gamma \lambda^4 \sin^2\theta \cos^2\theta . d\rho . d(\cos\theta) . d\psi.$$

En exprimant $\sin^2\theta\cos^2\theta$ en polynomes de Legendre $X(\theta)$ (7), (7)', on a

$$(13) \qquad dm = c^3\gamma\lambda^4 \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{21} X_2(\theta) - \frac{8}{35} X_4(\theta)\right] d\rho\, d(\cos\theta)\, d\psi.$$

Il suffit maintenant de porter les expressions (11), (12), (13) dans (10) et d'intégrer dans toute la masse considérée, par rapport aux trois variables ψ, θ et ρ ou c.

On intègre d'abord de 0 à 2π par rapport à ψ. Les termes en $\cos(\psi - \psi_r)$ de (12) disparaissent, les autres sont multipliés par 2π.

On aura ensuite à intégrer de 0 à π par rapport à θ. Or les termes en θ proviendront du produit de $X_2(\theta)$, $X_4(\theta)$ de (13) avec les $X_n(\theta)$, $X_n(\theta_r)$ de (12). On sait que l'on a, d'après la théorie des fonctions sphériques (*voir* premier fascicule de ce

tome III, Chap. V),

$$\int_0^\pi X_n(\theta) X_{n'}(\theta)\, d(\cos\theta) = 0, \qquad \int_0^\pi X_n^2(\theta)\, d(\text{co}$$

suivant que l'on a $n' = n$, ou $n' \neq n$. Tous les coefficie
$X_n(\theta_r)$ de (12) sont nuls sauf ceux de $X_2(\theta_r)$ et $X_4(\theta_r)$. C
pour le potentiel d'un *point extérieur* au champ d'intégrat

$$(14) \quad V_e = \frac{2\pi}{r} \int_r^0 \gamma\lambda^4 \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\,\frac{2}{21}\,\frac{c^2}{r^2} X_2(\theta_r) - \frac{2}{9}\,\frac{8}{35}\,\frac{c^4}{r^4} X_4(\theta_r)\right] c^3\, d\rho.$$

Pour les autres couches, pour lesquelles le point est intérieur, on aura

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{r}{c} X_1 + \frac{r^2}{c^2} X_2 + \ldots\right).$$

On obtient pour le potentiel V_i la même expression, où r et c sont intervertis,

$$(14)' \quad V_i = 2\pi \int_1^r \gamma\lambda^4 \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\,\frac{2}{21}\,\frac{r^2}{c^2} X_2(\theta_r) - \frac{2}{9}\,\frac{8}{35}\,\frac{r^4}{c^4} X_4(\theta_r)\right] c^2\, d\rho.$$

Il faut en déduire les composantes de l'attraction, en dérivant V_e et V_i par rapport à x et z. Or ici $V = F(z, r)$ est fonction explicite de z par $\cos\theta = \frac{z}{r}$ et par $r^2 = x^2 + z^2$ (les surfaces étant de révolution), et fonction de x seulement par r. On a donc

$$(15) \qquad X = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{x}{r}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{z}{r} + \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \frac{Z}{z} - \frac{X}{x} = \frac{1}{z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

On n'aura besoin dans la suite que de cette dernière différence. Le calcul donne pour le point extérieur

$$(16) \quad \frac{\partial Z_e}{\partial z} - \frac{\partial X_e}{\partial x} = \frac{8\pi b}{r^5} \int_r^0 \gamma\lambda^4 \left(\frac{1}{35} + \frac{2}{21}\,\frac{c^2}{r^2} - \frac{2}{9}\,\frac{c^2}{r^2}\cos^2\theta\right) c^5\, d\rho,$$

et une expression analogue pour un point intérieur. On prendra ensuite la somme des deux.

148. Équation définissant les aplatissements en fonction de la vitesse de rotation. — En tenant compte de la déformation ζ des

surfaces ellipsoïdales, on a

$$(17)\quad x^2 + z^2 = (r+\zeta)^2 = r^2 + 2r\zeta = c^2\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\cos^2\theta} + 2c^2\gamma\lambda^4\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

où r est le rayon vecteur d'un point de l'ellipsoïde, transformé en $r+\zeta$. L'équation de la courbe méridienne devient, en coordonnées cartésiennes (*géoïde théorique*),

$$(18)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\gamma\lambda^4\,\frac{x^2 z^2}{a^2 c^2} = 1.$$

Les coefficients directeurs de la normale seront

$$(19)\qquad \frac{x}{a^2}(1 - 2\gamma\lambda^4\cos^2\theta), \qquad \frac{z}{c^2}(1 - 2\gamma\lambda^4\sin^2\theta).$$

La force doit être normale à la surface. Nous écrivons que le rapport des composantes de la force est égal au rapport des composantes de la normale

$$(20)\qquad \frac{X + \delta X + \omega^2 x}{Z + \delta Z} = \frac{x}{z}\,\frac{1}{1+\lambda^2+\gamma\lambda^4\cos 2\theta}.$$

Dans le premier membre δX et δZ représentent la correction de l'attraction due à la déformation. Le second membre est obtenu en faisant le rapport des composantes (19) et le développement en négligeant λ^6. On en tire, pour la valeur de ω^2,

$$(21)\qquad \omega^2 = -\frac{X}{x} + \frac{1}{1+\lambda^2}\,\frac{Z}{z} - 2\gamma\lambda^4\,\frac{Z}{z}\cos 2\theta + \frac{\delta Z}{z} - \frac{\delta X}{x}.$$

Les deux premiers termes correspondent à l'ellipsoïde non déformé (6) et les deux autres à la déformation.

Remplaçons $\sin^2\theta$ dans (6) et $\cos^2\theta$ dans (16) par $\cos 2\theta$, on obtiendra

$$(22)\quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r \rho\, d\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{c^3}{r^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{3}{4}\lambda_r^2 + \frac{3}{10}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{3}{28}\beta^4\right)$$
$$+ \int_r^1 \rho\, d\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right) + B\cos 2\theta$$
$$+6\int_r^0 \gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{63}\,\frac{c^2}{r^2}\right)\frac{c^5}{r^5}\,d\rho + 6\int_1^r \gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{63}\,\frac{r^2}{c^2}\right)d\rho$$

Dans l'équilibre relatif, la masse tournant d'un . . constant et indépendant de $\cos 2\theta$, dont le coeffi.. nul,

$$B = \frac{3}{4}A + 2\gamma\lambda^4 D - \frac{2}{3}\int_r^0 \gamma\lambda^4 \frac{c^7}{r^7}\,d\rho - \frac{2}{3}\int_1^r \gamma\lambda^4 \frac{r^2}{c^2}\,d\rho = 0.$$

Multiplions cette expression nulle par $\frac{1}{7}$ et retranchons-la du reste de l'équation (22) $\left(\text{ce qui revient à y faire } \cos 2\theta = -\frac{1}{7}\right)$, on obtiendra, après avoir intégré par parties les deux intégrales contenant $\gamma\lambda^4$, pour transformer les $d\rho = \frac{d\rho}{dc}\,dc$ en $\rho\,d$,

$$(23) \qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \left(1 - \frac{6}{7}\lambda_r^2\right)\int_0^r \rho\, d\frac{c^3}{r^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\frac{c^2}{r^2}\lambda^2\right)$$
$$- \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\lambda_r^2\right)\int_r^1 \rho\, d\lambda^2\left(1 - \frac{3}{7}\lambda^2\right) + C,$$

où le terme C n'est pas autre chose que le second membre de la même équation, en première approximation (2), n° **119**, où l'aplatissement e serait remplacé par $-\frac{1}{7}\gamma\lambda^4$,

$$C = -\frac{2}{7}\left(\frac{\gamma\lambda^4}{r^3}\right)\int_0^r \rho\, da^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, da^5\gamma\lambda^4 - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, d\gamma\lambda^4.$$

Comme $\lambda^2 = 2e$ en première approximation, on voit qu'en représentant, pour simplifier, les λ^2 par la valeur corrigée $\lambda^2 - \frac{2}{7}\gamma\lambda^4$ dans (23), le terme C est ainsi contenu dans les deux autres et la formule (23), où l'on aura supprimé C, nous donnera la *valeur corrigée de* λ^2.

149. Les trois formules fondamentales en seconde approximation. — Dans les n^{os} **123** et **124**, nous avons donné, en première approximation, les formules qui déterminent l'aplatissement e, en fonction de φ, rapport de la force centrifuge à l'attraction, et de J, rapport des moments d'inertie. Nous allons les établir en seconde approximation.

Développons le dénominateur $1 + \lambda_r^2$ de la première intégrale

de (23), on aura

$$(24)\quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \left(1 - \frac{13}{7}\lambda_r^2\right)\left[\frac{\lambda_r^2}{r^3}\int_0^r \rho\, d\, c^3(1+\lambda^2) - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, d\, c^5\lambda^2(1+\lambda^2)\right]$$
$$- \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\lambda_r^2\right)\int_r^1 \rho\, d\lambda^2\left(1 - \frac{3}{7}\lambda^2\right).$$

λ_r^2 est la valeur de λ^2 sur la couche de petit axe $r = c$, où l'on considère un point quelconque de la masse animée de la rotation ω. Sous cette forme on voit tout de suite les termes du premier ordre qui donnent l'équation de Clairaut (2) du Chapitre X, en faisant $\lambda^2 = 2e$.

Ici, en négligeant e^3, on aurait $\lambda^2 = 2e + 3e^2 + \ldots$, mais pour l'étude théorique de l'équation il est préférable de garder λ^2, d'autant plus que λ^2 contient maintenant la correction $\gamma\lambda^4$.

En seconde approximation, on pose

$$(25)\qquad D = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, d\, c^3(1+\lambda^2).$$

On verrait facilement que la densité moyenne exacte n'est pas D, mais D : $(1+\lambda_r^2)$.

Le rapport de la force centrifuge à la pesanteur doit s'écrire ici

$$(26)\qquad \varphi = \frac{\omega^2 x}{X - \omega^2 x}.$$

D'autre part on obtient pour la composante de l'attraction sur l'équateur et à la surface, les indices 1 désignant les valeurs à la surface,

$$(27)\qquad \frac{X}{x} = \frac{4}{3}\pi f D_1\left(1 - \lambda_1^2 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

En prenant la valeur de l'expression (24) à la surface, la dernière intégrale disparaît. En y portant les valeurs de D_1, φ et X on obtient, en ne conservant que les termes du second ordre,

$$(28)\qquad (\lambda_1^2 - \varphi)D_1 + 3\varphi\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{7}\lambda_1^2\right)D_1 = \frac{3}{5}\int_0^1 \rho\, d\, c^5(1+\lambda^2)\lambda^2.$$

C'est la *formule fondamentale* de Clairaut, pour la surface, en seconde approximation. Elle correspond à (18) du Chapitre X.

L'équation correspondant aux moments d'inertie s'obtiendrait de même en suivant la même marche. On a

$$(29)\qquad \int_0^1 \rho\, d\, c^5(1+\lambda^2)\lambda^2 = 2\mathrm{J}\int_0^1 \rho\, d\, c^5(1+2\lambda^2).$$

C'est la *formule de d'Alembert* qui correspond à (17) (Chap. X) qui donne l'aplatissement conforme à la constante de précession, déterminée par le rapport J des moments d'inertie.

L'élimination de la seconde intégrale de (28) au moyen de (29) donne la relation correspondant à (19) (Chap. X) qui exprime la relation de condition entre e_1, φ et J, au moyen de l'intégrale de $\rho\, dc^5$ seule,

$$(29)'\qquad 2\mathrm{J}\int_0^1 \rho\, d\, c^5(1+2\lambda^2) = \frac{5}{3}(\lambda_1^2-\varphi)\mathrm{D}_1 + 5\varphi\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{7}\lambda_1^2\right)\mathrm{D}_1.$$

150. **L'équation différentielle de Clairaut-Radau en seconde approximation.** — Dérivons l'équation (23) ou (24), après avoir divisé par $1-\frac{2}{3}\lambda_r^2$ pour isoler la dernière intégrale, on a

$$(30)\qquad r^5\lambda^2\mathrm{D}\left[3-\eta+\frac{5}{21}\lambda^2\eta(2+\eta)\right] - 3\int_0^r \rho\, d\, c^5(1+\lambda^2)\lambda^2 + \frac{\omega^2}{2\pi f}r^5\lambda^2\eta = 0.$$

On dérive cette formule une seconde fois. On tient compte de la dérivée de D (25),

$$(31)\qquad 3\rho\left(1+\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda^2\eta\right) = 3\mathrm{D} + r\mathrm{D}',$$

où

$$\eta = \frac{r}{\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr},\qquad \zeta = -\frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}.$$

On utilise la première équation de Clairaut-Radau (4), n° 132, pour éliminer $r\eta'$ dans les termes du second ordre et l'on obtient

$$(32)\qquad r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(1+\eta) = \chi,$$

$$(33)\qquad \chi = \frac{4}{3}\varphi\,\zeta(1+\eta) + \frac{4}{21}\lambda^2\zeta(5+4\eta+2\eta^2) + \frac{2}{7}\lambda^2\eta(7+\eta).$$

Le premier membre est le même que celui de l'équation de Clairaut-Radau en première approximation. Le terme de correc

tion χ est de l'ordre de e. Il est toujours *positif* et *toujours croissant* avec φ, ζ, η, λ^2 du centre à la surface, où sa valeur est maximum ([1]). Auparavant G. H. Darwin et Callandreau avaient donné des formes plus compliquées, qui ne permettaient pas la discussion complète.

On démontre, comme en première approximation, que η, d'abord croissant au centre, l'est du centre à la surface. En particulier la fonction η est *toujours croissante* pour la Terre. *La seconde limite de l'aplatissement* n° 137 correspondant à celle de Poincaré, *est conservée.*

On démontre également que *les limites de η sont les mêmes* qu'en première approximation, avec la relation fondamentale

$$(34) \qquad 0 < \eta < \zeta < 3.$$

Enfin en donnant à ζ sa valeur aux deux limites η et 3 on voit que le *champ de variation* de $r\eta' - \chi$, en seconde approximation, est le même que celui de $r\eta'$ en première approximation. Comme la valeur de χ est de l'ordre de e, on a la même discussion et les mêmes conclusions.

En troisième et quatrième approximation les termes de correction seraient encore plus petits. La démonstration subsiste. Elle est générale.

151. **L'équation de condition en seconde approximation.** — On procède comme en première approximation pour introduire la transformation de Radau, Chapitre XI, n° 135.

On a d'abord identiquement, d'après la valeur de D, formule (25),

$$(35) \qquad \int_0^c \mathrm{D}\,dc^5 + \int_0^c \rho c^5\,d\lambda^2 = \frac{5}{2}c^5\mathrm{D} - \frac{3}{2}\int_0^c \rho\,dc^5(1+\lambda^2).$$

On en déduit à la surface, pour l'intégrale de (29'),

$$(36) \qquad 3\int_0^1 \rho\,dc^5(1+2\lambda^2)$$
$$= 5\mathrm{D}_1 - 2\int_0^1 \mathrm{D}\,dc^5 - 2\int_0^1 \rho\,c^5\,d\lambda^2 + 3\int_0^1 \rho\,dc^5\,\lambda^2.$$

([1]) *Voir* Alex. VÉRONNET, *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure de la Terre* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1912, Chap. V, n° 4).

La dernière intégrale peut être remplacée par sa valeur en première approximation formule (18), Chapitre X. L'intégrale en $D\,dc^5$ s'obtient comme en première approximation, Chapitre XI, n° 135, et le terme de correction χ de (33) s'introduit dans (17) en remplaçant dans (16') $r\eta'$ ou $a\eta'$ par sa nouvelle valeur (32). Alors (18) devient

$$(37)\qquad D_1\sqrt{1+\eta_1} = \left(K + \frac{1}{10}\frac{\chi}{\sqrt{1+\eta}}\right)\int_0^1 D\,dc^5.$$

K désigne toujours la valeur moyenne de l'expression de première approximation, n° 136. Dans cette parenthèse, χ et η désignerons également les valeurs moyennes de ces quantités obtenues de la même façon.

La troisième intégrale de (36) peut se transformer comme il suit, en vertu de la valeur de η (31),

$$(38)\qquad \int_0^1 \rho c^3\,d\lambda^2 = \int_0^1 \rho c^5\frac{\lambda^2\eta}{c}\,dc = \frac{1}{5}(\lambda^2\eta)\int_0^1 \rho\,dc^5,$$

où $(\lambda^2\eta)$ désigne la valeur moyenne définie par cette relation et où la dernière intégrale sera remplacée par sa valeur en première approximation, formule (19), Chapitre X.

En portant toutes ces valeurs dans la formule (28) en tenant compte de la première approximation pour simplifier les termes du second ordre, on obtient finalement l'équation

$$(39)\qquad \lambda^2 + \frac{4}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi + \varepsilon,$$

$$(40)\qquad \varepsilon = \frac{2}{25}J\chi\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{2}{15}(\lambda^2\eta)(\lambda^2-\varphi) + \xi,$$

$$(41)\qquad \xi = 2\lambda^2\left(J + \frac{3}{7}\varphi\right) + 2\varphi J - \frac{3}{2}\varphi^2.$$

152. Les limites de l'aplatissement de la Terre en seconde approximation. — (39) est la formule (19) du chapitre précédent, en première approximation, complétée par les termes de correction ε et ξ. On y remplace encore λ^2 par $2e+3e^2$, et η_1 par sa valeur en seconde approximation, obtenue en éliminant l'intégrale de (30) au moyen de (28)

$$(42)\qquad \eta_1 = 5\frac{\varphi}{\lambda_1^2} - 2 + \frac{9}{7}\varphi + \frac{5}{14}\varphi\eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2 - \frac{\varphi}{14}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right).$$

Dans la dernière expression, les deux premiers termes représentent la valeur de η_1 en première approximation, le terme en φ est le terme de correction. En désignant par η_0 cette valeur de première approximation, on aura

$$\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = \frac{\sqrt{1+\eta_0}}{K} - \frac{\varphi}{28}\,\frac{1}{\sqrt{1+\eta_0}}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_0\right).$$

Dans le terme de correction en φ, on a fait $\eta_1 = \eta_0$ et $K = 1$, valeurs suffisament approchées. Finalement on a

$$(43)\qquad e + \frac{2}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_0}}{K} = J + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{25}J\chi\frac{\sqrt{1+\eta_0}}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{2}{15}(e\eta)(2e-\varphi) + \xi$$

$$\xi = \frac{1}{35}\,\frac{J\varphi}{\sqrt{1+\eta_0}}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_0\right) + 2e\left(J + \frac{3}{7}\varphi\right) - \frac{3}{2}e^2 - J\varphi - \frac{3}{2}\varphi^2.$$

Les valeurs de J et de φ, considérées au chapitre précédent, n° 137, donnent $J + \frac{\varphi}{2} = 0{,}00500919$. On calcule ξ en prenant pour e la la valeur de première approximation $1:297{,}2$. On obtient

$$\xi = (8{,}17 + 32{,}05 - 16{,}98 - 11{,}35 - 9{,}02)\,10^{-6} = 2{,}87.10^{-6}.$$

Le maximum de $K = 1{,}00075$ a toujours lieu pour $\eta = \frac{1}{3}$, comme en première approximation, n° 135 et 136. Ces valeurs de K et η déterminent la limite de Poincaré, pour laquelle il faudra, dans (43), donner aux termes de correction leur valeur maximum. On fera donc $-(e\eta) = 0$, et dans χ, défini par (33), on fera $\eta = \frac{1}{3}$ et $\xi = \xi_1$, ou $\rho_1 = 2{,}0$, valeur minimum de la densité superficielle pour la Terre. On trouve $\chi = 0{,}0327$, puis $4{,}65 \times 10^{-6}$ pour la valeur du terme de correction correspondant et $0{,}00501671$ pour la valeur du second membre de (43), *première limite*.

La *seconde limite de l'aplatissement* n'est définie par la valeur maximum $\eta = \eta_1$ à la surface.

Dans K de (43) défini par (18), n° 135, il faudra donner à η la valeur η_1 de (42), c'est-à-dire remplacer $\frac{1}{K_1}$ de première approximation, par $\frac{1}{K_1} - \frac{K'_1}{K_1^2}d\eta_1$, où K'_1 est la dérivée de K par rapport à $\eta = \eta_1$, n° 135, et $d\eta_1$ le terme de correction de η_1 dans (42). On pourra faire $K_1 = 1$ dans le terme en $K'_1\,d\eta_1$, et le mettre dans le second membre de (43). Dans cette expression (43) on fera

encore $(e\eta) = e_1\eta_1$ et $\eta = \eta_1$ ou η_0 de première approximation, dans le terme en χ. Les termes de correction, autres que ξ, dans (43) prendront la forme

$$(44)\quad \xi_1 = \frac{1}{25} J \chi_1 - \frac{2}{15} e\eta_1(2e - \varphi) - \frac{J\varphi}{700} \frac{\eta_1(3\eta_1 - 1)}{1 + \eta_1} \left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right).$$

On obtiendra pour χ_1 la nouvelle valeur 0,0323, au lieu de 0,0327, et pour le nouveau terme de correction

$$\xi_1 = (4,23 - 0,84 - 0,16)\,10^{-6} = 3,23 \times 10^{-6}.$$

Le premier membre de (43) pour cette seconde limite aura la même forme que le dernier membre de (20), n° **137**, où η_1 sera remplacé par η_0 valeur de première approximation.

Comme pour la première approximation, n° **137**, on calcule une série de valeurs du premier membre de (43), dans les deux cas, pour différentes valeurs de e, on a

$1 : e$.	K = 1,00075.	K = K_1.
296,0..........	0,005 016 70	0,005 018 49
296,1..........	16 01	17 82
296,2..........	15 32	17 15
296,3..........	14 63	16 48
296,4..........	13 95	15 81
296,5..........	13 26	15 13

Pour la limite de Poincaré, la somme des termes du second membre de (43) est 0,005 016 7 1 et donne comme solution 296,00 pour l'inverse de l'aplatissement $1 : e$. Pour la seconde limite, en ajoutant ξ_1 et ξ, on a 0,005 015 2 9 et 296,48.

Mais on a vu, n° **148**, (23), que λ^2 était mis pour $\lambda^2 - \frac{2}{7}\gamma\lambda^4$. On a remplacé λ^2 par $2e$, alors e est mis pour $e - \frac{4}{7}\gamma e^2$ et $\frac{1}{e}$ est mis pour $\frac{1}{e} + \frac{4}{7}\gamma$. La plus grande limite de $1 : e$ devra être augmentée de $\frac{4}{7}\gamma$ ou 0,08 par la déformation. Elle devient 296,56.

L'inverse de l'aplatissement de la Terre sera, en seconde approximation, compris entre les limites

$$(45)\qquad 296,00 < \frac{1}{e} < 296,56, \qquad \frac{1}{e} = 296,28 \pm 0,28.$$

La valeur moyenne est abaissée d'une unité par rapport à la

première approximation 297,25, n° 137. De plus l'écart entre les limites est doublé, 0,56 au lieu de 0,29. La précision reste encore très grande, de l'ordre de la moitié d'une unité.

153. Les limites de l'aplatissement en toute approximation. Conclusions. — Il faut remarquer en outre que $e^3 = 38 \times 10^{-9}$, de sorte qu'en se limitant à la seconde approximation et à e^2, on néglige des termes, qui ne peuvent influer que sur la troisième décimale de l'inverse de l'aplatissement. Les limites de cet aplatissement sont donc déterminés, *avec toute l'approximation possible*, avec leurs cinq chiffres exacts donnés par (45).

Ces valeurs ne dépendent que de celles de φ et de J, qui sont déterminées elles-mêmes avec cinq chiffres exacts. De plus J est donné uniquement par les mesures *astronomiques* de la précession et φ par les mesures *physiques* de l'attraction déterminées par le pendule. Ces limites sont *indépendantes de la loi des densités*.

On a vu, au n° 139, le calcul des valeurs de l'aplatissement faites en première approximation, au moyen des lois de densité de Roche, de Lipschitz, etc., ce qui nous donne des limites *pratiques* plus étroites que les limites théoriques. On détermine la correction à faire, en seconde approximation, en différentiant l'équation de condition (43), n° 152, par rapport à e, ce qui donne

$$(46) \qquad de + \mathrm{H}\, de = \xi + \frac{1}{25}\mathrm{J}\chi\frac{\sqrt{1+\eta_0}}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{2}{15}(e\eta)(2e - \varphi).$$

H contient la dérivée de K, fonction de η et de e. Dans tous ces termes de correction, on introduit les valeurs de première approximation. La valeur moyenne $(e\eta)$ est calculée par l'intégrale qui la définit (38). Finalement on obtient, avec les valeurs extrêmes, $n = 1,2$ et 3, de la loi de Lipschitz et de Roche, les limites étroitement resserrées

$$(46') \qquad 296,44 < \frac{1}{e} < 296,48, \qquad \frac{1}{e} = 296,46 \neq 0,02.$$

On peut dire ainsi que *pratiquement l'inverse de l'aplatissement est déterminé à 0,02 près, en toute approximation dans l'hypothèse de Clairaut, par les seules données relatives à l'attraction et à la précession.*

Les mesures géodésiques et celles relatives au pendule sont loin de donner cette précision, fournie par les seules ressources du calcul mathématique appliqué aux données astronomiques et physiques. Les mesures de Clarke (1880) et Faye (1881) donnaient 293 et 292. Celles plus récentes de Helmert (1907) et de Hayford (1909) donnaient 298,3 et 297, à une ou deux unités près. La dernière mesure d'Helmert (1915) abaissait ces nombres à 296, en parfait accord avec les calculs de seconde approximation (1). On peut dire d'ailleurs que si ces dernières mesures ont fini par s'imposer, c'est grâce à la démonstration mathématique, qui imposait ces valeurs comme seules compatibles avec les mesures astronomiques.

Il serait à désirer que les mesures géodésiques et celles du pendule puissent atteindre la précision des mesures astronomiques, car les marées de l'écorce prouvent surabondamment que la surface terrestre possède assez de jeu pour se mettre en équilibre hydrostatique sous l'action des forces permanentes. Alors si la valeur de l'aplatissement mesuré ne cadrait pas avec les limites calculées, il faudrait abandonner l'hypothèse de Clairaut d'une vitesse uniforme et *recourir à une autre des hypothèses*, qui seront étudiées dans le chapitre suivant.

Les calculs de l'aplatissement en seconde approximation, mais uniquement pratiques et numériques, avaient été faits déjà par Wiechert, dans l'hypothèse un peu simpliste d'une Terre formée seulement d'un noyau et d'une écorce. Il avait trouvé 297,3 pour la valeur de l'inverse de l'aplatissement, Callandreau avait trouvé la même valeur 297,4, G. H. Darwin (2) avait fait également les calculs avec la loi de Roche et trouvé 296,4. Cette valeur coïncide exactement avec toutes celles déterminées par A. Véronnet, et données par (46'). Tous les auteurs précédents n'avaient fait qu'une seule détermination, sans s'occuper des limites possibles ni de la variation des résultats avec les lois de densités, ou les hypothèses admises, ce qui est absolument nécessaire, pour pou-

---

(1) La détermination de M. Helbronner, 293,3 (1929) par le réseau des Alpes françaises présente un grand intérêt comme détermination *locale* précise, mais peut ne pas donner la même précision pour l'aplatissement général ou moyen.

(2) *Theory of the figure of the Eart* (*Monthly Notices*, 1899, p. 119).

voir juger de la validité de telle ou telle détermination géodésique.

Tout récemment M. R. Wavre a donné une nouvelle détermination de l'aplatissement, en seconde approximation, au moyen de sa méthode, dont le principe est indiqué au n° 115. Avec les mêmes valeurs de φ et J que ci-dessus il trouve 298,3 au lieu de 297,1, en première approximation ([1]). En seconde approximation, il donne les limites 293,75 et 295,9. La dernière valeur est sans doute la limite de Poincaré déterminée ci-dessus : 296,00. L'autre limite n'a rien de commun avec celle dont il est parlé plus haut. En tout cas elle ne peut pas donner une valeur plus petite que celle de Poincaré, pour $1 : e$, puisque celle-ci est une *limite inférieure*, comme il a été indiqué au n° 136. Il est regrettable que M. R. Wavre n'ait pas connu les travaux de ses prédécesseurs : Wiechert, Callandreau, Darwin, Véronnet, ni montré comment ils se tromperaient tous, en donnant des nombres égaux ou supérieurs à 296. Il semble bien que M. Wavre ait négligé les variations de K, en seconde approximation, comme il le fait en première approximation, n° 78. Il ne conserve donc qu'une valeur $1 : e$, voisine de la limite de Poincaré en négligeant la seconde limite étudiée ci-dessus, celle qui donne précisément les valeurs supérieures à 296. De plus, il ne limite le calcul des termes de correction que par les deux limites primitives de Clairaut, qui sont extrêmement larges $\frac{1}{2}\varphi < e < \frac{5}{4}\varphi$, ce qui lui donne cet écart de 2,15 entre les valeurs extrêmes de $1 : e$, au lieu des valeurs beaucoup plus resserrées obtenues ci-dessus. C'est pour la même raison qu'au n° 81 il obtient des limites deux fois plus grandes que Callandreau, Darwin, Helmert, etc. pour la dépression de l'ellipsoïde et la correction des valeurs de g. Il reproche à Callandreau n° 78 d'avoir négligé 300^{m} dans la différence des rayons. Cela provient d'une différence de notation. Callandreau mesure la déformation, à partir de l'ellipsoïde de référence, et non à partir de l'ellipsoïde de première approximation.

154. Tableau résumé des limites successives de l'aplatissement

---

([1]) *Figures planétaires et géodésie*, n° 78, Gauthier-Villars, 1932.

de la Terre. — Nous avons vu, au n° **120**, que Clairaut, dès 1743, avait déterminé deux limites fondamentales entre lesquelles cet aplatissement devait être nécessairement compris : $\frac{1}{2}\varphi$ et $\frac{5}{4}\varphi$, et cela quelle que soit la loi des densités à l'intérieur de la Terre. La première correspondait en effet au cas où la masse de la Terre aurait été condensée totalement en son centre, la seconde au cas où la masse aurait été homogène, et la répartition d'une masse hétérogène quelconque est nécessairement intermédiaire entre ces deux limites. Les valeurs de ces limites ne dépendaient que d'une mesure physique φ, rapport de la force centrifuge à la pesanteur, laquelle était donnée par le pendule. Du temps de Clairaut, on pouvait déjà obtenir trois chiffres exacts, les deux limites fixées étaient fort éloignées l'une de l'autre et donnaient pour l'inverse de l'aplatissement les nombres 230 et 577, mais les mesures géodésiques étaient loin de tomber entre ces limites.

A la fin du XIXe siècle, soit 150 ans plus tard, Tisserand ramenait la dernière limite à 403. L'aplatissement pouvait varier encore du simple au double.

On a vu ensuite, au n° **125**, comment l'introduction du nombre J, rapport des moments d'inertie donné par les mesures astronomiques de la précession et la formule de d'Alembert, permettait d'abaisser ces limites à 270,3 et 305,3. La combinaison des deux formules de Clairaut et de d'Alembert aurait donc pu déjà permettre de déterminer l'aplatissement de la Terre, à un dixième près, dès la fin du XVIIIe siècle.

Enfin nous avons vu, aux n°s **137** et **152**, comment la transformation de Radau, appliquée à l'équation de condition en φ et J, équation de Clairaut-d'Alembert, avait permis à Henri Poincaré ensuite à Alex. Véronnet, de déterminer les deux limites très resserrées : 297,10 et 297,39 en première approximation, avec 296,00 et 296,56 en toute approximation.

L'écart possible théoriquement se réduit à $\pm$ 0,15 sur l'inverse de l'aplatissement, en première approximation, et 0,28 en toute approximation, soit

$$297,25 \pm 0,15, \qquad 296,28 \pm 0,28.$$

Cette précision obtenue par les calculs mathématiques, appliqués à des nombres φ et J fournis par des mesures physiques et des

mesures astronomiques, dépasse de beaucoup les meilleures déterminations géodésiques.

Les calculs pratiques, sur différentes lois de densités, restreignent encore ces limites théoriques et montrent que l'on a, quelle que soit la loi des densités choisie, avec plusieurs centaines de déterminations, Chapitre XIV.

$$297,18 \pm 0,01, \qquad 296,46 \pm 0,02.$$

Une connaissance suffisamment précise des nombres φ et J permettrait de déterminer l'aplatissement de la Terre avec cinq chiffres exacts. Actuellement ils nous le donnent avec 4.

Tableau des limites successives de l'aplatissement :

		1 : e.
N° 120.	Clairaut $\left(\frac{1}{2}\varphi < e < \frac{5}{4}\varphi\right)$	230 -577
N° 120.	Clairaut-Tisserand	230 -403
N° 123.	Callandrau-Véronnet $\left(J < e < \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{5}J\right)$	270,3 -305,3
N° 137.	Poincaré-Véronnet (première approximation)	297,10-297,39
N° 152.	Poincaré-Véronnet (toute approximation)	296,00-296,56
N° 154.	Véronnet (calculs numériques et pratiques)	296,44-296,48

Ces valeurs limites, qui dépendent uniquement de celles de φ et J, pourraient être modifiées légèrement par la modification même des valeurs de base. C'est ainsi que M. de Sitter (1924) a donné la valeur 296,92 pour l'inverse de l'aplatissement ainsi déduit, avec des nombres légèrement différents ([1]). Nous avons vu, formule (21), n° 137, l'expression qui donne la correction de e, correspondant à celles de φ et de J. Les corrections de seconde approximation restent les mêmes et il suffit de modifier les valeurs de première approximation.

155. **La surface de l'ellipsoïde terrestre est déprimée entre les pôles et l'équateur.** — La formule (22) du n° 148 détermine l'aplatissement des surfaces de niveau en fonction de la vitesse de rotation ω. Cette expression comprend en particulier des termes dépendant de la latitude θ. Comme la rotation est uniforme, on est

---

([1]) *On the flattening and the constitution of the Earth* (*Konink. Akak. v. Wet.*, Amsterdam, t. 27).

conduit à annuler le coefficient B de $\cos 2\theta$ dans la formule de ω^2, pour réaliser l'équilibre relatif rotation en bloc.

On obtient une première relation qui sert précisément à définir la déformation introduite par l'équilibre relatifs. On a

$$(47)\qquad \frac{3}{4}A + 2\gamma\lambda^4 D - \frac{2}{3}\frac{1}{r^7}\int_r^0 \gamma\lambda^4 c^7\,d\rho - \frac{2}{3}r^2\int_1^r \frac{\gamma\lambda^4}{c^2}\,d\rho = 0,$$

$$(47')\qquad A = \frac{4}{r^2}\int_r^0 \left(e_r - \frac{c^2 e}{r^2}\right)^2 c^3\,d\rho = \frac{\alpha\omega^2}{\pi f},$$

α étant défini par (5) et analogue à A.

En dérivant deux fois la formule (47) on obtient une équation différentielle du second ordre par rapport à $\gamma\lambda^4$, que l'on peut écrire

$$(48)\qquad r\varepsilon' + \varepsilon(\varepsilon+5) - 2\zeta(1+\zeta) + \frac{1}{\gamma}f(\eta, \varepsilon) = 0,$$

où

$$\varepsilon = \frac{r(\gamma\lambda^4)'}{\gamma\lambda^4},$$

est une expression analogue à la fonction η de Radau et à ζ. L'expression différentielle (48) a la même forme que l'équation de Clairaut-Radau où η serait remplacé par ε, mais avec en plus un terme fonction de η et ε et divisé par γ.

Callandreau démontre que $\gamma\lambda^4$, nul au centre, commence par décroître et devient négatif. Il démontre qu'en tout cas γ reste toujours négatif, ce qui indique que la déformation est nulle à l'équateur et au pôle seuls, (9), n° **147**. Il y a donc dépression entre le pôle et l'équateur, d'où ce théorème de Callandreau :

Dans un fluide hétérogène, en équilibre permanent, animé d'une rotation lente, toutes les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes déprimés entre les pôles et l'équateur.

Cette déformation correspond à la première *figure dérivée des ellipsoïdes homogène*, comme on l'a vu dans le 1[er] fascicule de cet ouvrage, n° 80 (*fig.* 38).

On peut déterminer une *limite théorique supérieure de* γ,

$$(49)\qquad -\gamma < \frac{3}{40}\eta(2+\eta)\sqrt{1+\eta}.$$

Cette formule due à Callandreau, donne une dépression maximum de 10^m, pour la Terre à une latitude de 45°. Une erreur de chiffre lui avait donné 5^m, valeur rectifiée dans une note (*Ann. Obs. Paris*, 1889).

G. H. Darwin a calculé la dépression maximum dans le cas où la densité suivrait la formule de Roche. Il trouve $3^m,26$ seulement [1]. Dans l'hypothèse simplifiée d'un noyau et d'une écorce il trouve un maximum de $8^m,8$.

Wiechert, dans son hypothèse d'un noyau de fer et d'une écorce de rochers [2], dont l'épaisseur serait le $1/5^e$ du rayon, trouve une dépression de $3^m,79$. M. A. Véronnet a calculé les limites maximum et minimum de cette dépression avec les formules de Lipschitz, en faisant varier n. Il trouve [3] des valeurs comprises entre $1^m,26$ et $4^m,27$, pour des valeurs de la densité superficielle comprise entre 2 et 3.

Avec la formule de Roche, qui réalise l'accord des aplatissements donnés par l'attraction et par la précession, il trouve la valeur qui doit être réalisée *pratiquement*

$$\delta r = 3^m,28 \pm 0^m,42,$$

valeur identique à celle de G. H. Darwin. Cette déformation est tout à fait insensible et négligeable pour la Terre, n° 177.

Pour Jupiter et Saturne on a 1,64 et 1,59 pour la valeur de η. La dépression maximum théorique donnée par (49) serait de 183 et de 552^{km}, c'est-à-dire le $\frac{1}{1120}$ et $\frac{1}{3900}$ du rayon. Par rapport à l'aplatissement des deux planètes, ou à la déformation sphérique, cette déformation ellipsoïdale serait 23 fois et 12,3 fois moindre. Comme l'équateur tourne plus vite que les autres parallèles, cette dépression serait encore accentuée.

Elle serait ici de l'ordre de l'aplatissement terrestre pour Jupiter, du triple pour Saturne. En effet ces dépressions, rapportées au rayon de la Terre, seraient respectivement de $16^{km},4$ pour Jupiter et de 59^{km} pour Saturne, alors que la dépression polaire

(1) *The theory of the figure of the Earth* (*Montly Notices*, 1899, p. 107).
(2) *Nachr. K. Gesell. zu Göttingen* (1896).
(3) *Journal de Mathém.*, 1912, p. 462.

terrestre due à l'aplatissement est de 21^{km}. Il est vrai que pratiquement, en tenant compte de la loi des densités, ces nombres sont réduits au tiers pour la Terre, mais la loi des densités applicable à Jupiter et Saturne n'est pas la même et donnerait une déformation plus voisine du maximum théorique ([1]).

156. **Les surfaces ellipsoïdales sont impossibles, même en mouvement permanent, avec vitesses de rotations variables.** — Nous avons vu que, dans le mouvement permanent, avec ω variable sur chaque surface de niveau et sur chaque parallèle de ces surfaces, l'équation hydrodynamique, qui définit l'équilibre, a la même forme que dans le mouvement en bloc, n° 46. Dans le cas où les surfaces de niveau coïncident avec les surfaces d'égale densité, on obtient la même relation (6), n° 146, entre les vitesses ω et les aplatissements e ou λ. Mais il s'introduit la nouvelle condition hydrodynamique d'équilibre $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$, n° 48. La vitesse de rotation doit être la même pour tous les points qui sont à égale distance de l'axe de rotation, elle ne doit dépendre que de cette distance x à l'axe.

Cette formule (6) peut s'écrire, en intégrant par parties le coefficient de $\sin^2\theta$ et en remplaçant les λ^2 et β^2 par e,

$$(50)\qquad \omega^2 = \omega_r^2 - 8\pi f \sin^2\theta \int_r^0 \left(e_r - \frac{c^2}{r^2} e\right)^2 \frac{c^3}{r^3}\, d\rho, \qquad \sin^2\theta = \frac{x^2}{r^2},$$

r est l'axe polaire de la couche, contenant le point considéré de coordonnées x, z, et de vitesse de rotation ω. Il peut être pris égal au rayon vecteur du point, dans les termes en e^2.

ω_r^2 représente les deux premiers termes de (6), qui dépendent uniquement de r. On voit que ω_r^2 définit la vitesse de rotation sur l'axe polaire, où $x = 0$, et doit être constant, comme x, d'après la condition hydrodynamique ci-dessus.

ω_r^2 et le coefficient de x^2 ont la même valeur pour tous les points

---

([1]) M. Callandreau, dans son premier Mémoire sur la théorie de la figure des planètes a calculé surtout les expressions $\frac{B - A}{M}$ et $\frac{B - A}{B}$ en seconde approximation. Il les a étendues à Jupiter et Saturne dans le second Mémoire sur le même sujet.

de la même surface de niveau, puisqu'ils ne dépendent que de l'axe polaire r de cette couche. Mais de plus, pour que ω^2 soit uniquement fonction de x, il faut qu'ils soient tous deux constants dans tout le fluide, car ω^2 ne dépend directement de x que par $\sin^2\theta$. Or comme la densité ρ est supposée connue et définie en fonction de r, on voit que $\omega_r^2 = \text{const.}$ définit la valeur de l'aplatissement e de chaque couche en fonction de r, ou $e = f(r)$. On voit qu'il en est de même du coefficient de x^2, qui définirait donc e comme *une autre* fonction k de r (5o′), ce qui est impossible.

D'ailleurs, pour que le coefficient de x^2 soit une constante, il faudrait avoir

$$(5o') \qquad \int_r^0 \left(e_r - \frac{c^2}{r^2}e\right)^2 \frac{c^3}{r^3}\,d\rho = kr^2 \qquad (d\rho = \rho'\,dr);$$

or au centre on a

$$r = 0, \qquad c = r, \qquad e = e_r = e_0 \qquad \text{et} \qquad \rho' = 0,$$

pour la plupart des lois de densité. Le premier membre serait un zéro d'ordre 3. Pour qu'il en soit de même du second, il faut que l'on ait $k = 0$, c'est-à-dire que le coefficient de x^2 soit nul. De plus la fonction constante k est inverse de r^2 d'après (5o′), ce qui n'a pas lieu pour ω_r^2.

On a vu, dans le numéro précédent, que la déformation de l'ellipsoïde en seconde approximation est très faible, dans le cas de l'équilibre relatif. Dans le cas du mouvement permanent, il faudra donc une faible variation de vitesse pour réaliser des surfaces ellipsoïdales et si la condition $\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$ n'est pas réalisée mathématiquement, elle le sera assez pour que les surfaces de niveau et d'égale densité coïncident *pratiquement*.

La formule (5o) est valable avec vitesses de rotation variables. On voit alors que, pour réaliser des surfaces ellipsoïdales, il faut que la vitesse de rotation croisse de l'équateur aux pôles. C'est le contraire qui a lieu pour le Soleil, Jupiter et Saturne. La surface sera donc encore davantage déprimée vers 45°, que si elle tournait d'une seule pièce. De plus ces différences de vitesse restent probablement localisées dans les couches superficielles, au lieu de rester constantes en profondeur, suivant les lignes parallèles à l'axe de

rotation, d'après la condition $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$. Il s'ensuit que les couches d'égale densité ne coïncident pas avec les surfaces de niveau. A la surface extérieure, ce sont donc des couches de densités différentes qui affleurent suivant les différents parallèles, en produisant les bandes que nous voyons sur Jupiter et Saturne.

En représentant par α le demi-coefficient de $\sin^2\theta$ dans (50) divisé par ω_r^2 on peut écrire, comme α est petit,

$$(51) \qquad \omega^2 = \omega_r^2(1 - 2\alpha \sin^2\theta), \qquad \omega = \omega_r(1 - \alpha \sin^2\theta).$$

En faisant $e = 0$ dans l'expression de α, on obtient une première limite supérieure

$$\alpha \leqq \frac{4\pi f e_r^2}{\omega_r^2 r^3} \int_r^1 e^3\, d\rho = \frac{e^2 \zeta}{\rho},$$

ce qui donnerait $\alpha \leqq 0,0058$ pour la Terre. La rotation à 45° se ferait en 250 secondes de moins qu'à l'équateur. Une étude plus serrée de l'intégrale donnerait la limite

$$\alpha \leqq e\eta\sqrt{1 + \eta},$$

qui est la moitié de la valeur précédente.

QUATRIÈME PARTIE.

QUESTIONS DIVERSES. LA PESANTEUR. LA DENSITÉ INTÉRIEURE. MOUVEMENTS SUPERFICIELS. JUPITER ET SATURNE.

CHAPITRE XIII.

LA VARIATION DE LA PESANTEUR ET L'APLATISSEMENT DE LA TERRE.

157. **Objet du Chapitre.** — Clairaut, dans la *Figure de la Terre*, après avoir donné la formule qui déterminait l'aplatissement des surfaces de niveau, par rapport à la vitesse de rotation, avait démontré une autre formule, également fondamentale, qui déterminait cet aplatissement d'après la variation de la pesanteur à la surface. Cette formule a été calculée en seconde approximation par Airy (1816), Helmert (¹), Darwin (²), Callandreau (³), etc., afin de préciser plus rigoureusement l'aplatissement que l'on peut en déduire. Ces travaux et leurs résultats seront exposés dans ce chapitre avec quelques autres sur la même question.

158. **Formule de Clairaut reliant l'aplatissement et la variation de la pesanteur.** — La pesanteur est la résultante de l'attraction et de la force centrifuge à la surface de la Terre. D'après le n° 70, les composantes de cette force résultante g sont $(P - \omega^2)x$, $(Q - \omega^2)y$,

(¹) *Höhere Geodäsie*, t. 2.

(²) Darwin, *Monthly Notices*, t. 60, 1900, et *Scientific papers*, t. 3, n° 7.

(³) Callandreau, *Ann. Observ. Paris*, t. 19, 1889, et *Bul. astron.*, 1897.

Rz. Sur l'ellipse méridienne, en faisant $y = 0$, nous aurons

$$(1)\quad g^2 = R^2 z^2 + (P - \omega^2)^2 x^2 = R^2\left(z^2 + \frac{c^4}{a^4}x^2\right) = R^2 c^2\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Or la partie entre parenthèses peut s'écrire, en tenant compte de $a^2 = c^2(1+\lambda^2)$ et de l'équation de l'ellipse

$$(2)\qquad \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2(1+\lambda^2)} = \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2}(1-2e) = 1 - 2e\frac{x^2}{a^2}.$$

En désignant par θ la colatitude, $\sin\theta = \frac{x}{r}$, on peut dans le terme en e, remplacer a par r, en négligeant e^2, et l'on aura

$$(3)\qquad g^2 = R^2 c^2(1 - 2e\sin^2\theta),\qquad g = Rc(1 - e\sin^2\theta).$$

La seconde formule est obtenue également en négligeant e^2.

L'expression R est donnée par la formule (13), Chapitre VIII. En prenant sa valeur à la surface, la seconde intégrale s'annule, en développant le terme restant, par rapport aux puissances de l, on a

$$(4)\qquad R = \frac{4}{3}\pi f\int_0^1 \rho\, d(1+\lambda^2)\frac{l^3}{\lambda^3}\left(1 - \frac{3}{5}l^2 + \frac{3}{7}l^4 - \ldots\right).$$

l^2 est de l'ordre de grandeur de e. On néglige les l^4 en première approximation. La valeur de l^2 est donnée par la formule (27), Chapitre VIII, n° 97. On obtiendra de même l^3 en développant et remplaçant $l^2 = 2e$,

$$(5)\qquad \begin{cases} l^2 = \dfrac{c^2}{r^2}\lambda^2\left(1 - \lambda_1^2\sin^2\theta + \dfrac{c^2}{r^2}\lambda^2\sin^2\theta\right), \\[2ex] \dfrac{l^3}{\lambda^3} = \dfrac{c^3}{r^3}\lambda^3\left(1 - 3e_1\sin^2\theta + 3\dfrac{c^2}{r^2}e\sin^2\theta\right), \end{cases}$$

r est la valeur du petit axe à la surface.

La valeur de R devient alors

$$(6)\quad R = \frac{4}{3}\pi f\int_0^1 \rho\, d\frac{c^3}{r^3}(1+\lambda^2)\left[(1 - 3e_1\sin^2\theta) + 3\frac{c^2}{r^2}e\left(\sin^2\theta - \frac{2}{5}\right)\right].$$

Pour un ellipsoïde homogène, on a

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 c = \frac{4}{3}\pi\rho c^3(1+\lambda^2)$$

et la première intégrale est l'expression exacte de la densité moyenne D de la masse hétérogène, en tenant compte de l'aplatissement des couches. La valeur de la seconde intégrale en $dc^5 e$ est donnée par la formule (18), Chapitre X. L'expression de la pesanteur (3) devient

$$(7) \quad g = \frac{4}{3}\pi f c \mathrm{D}\left[1 - 3e\sin^2\theta + \left(e - \frac{1}{2}\varphi\right)(5\sin^2\theta - 2)\right](1 - e\sin^2\theta).$$

En effectuant les calculs, négligeant e^2, on aura

$$(8) \qquad g = f\frac{\mathrm{M}}{c^2}\left[(1 - 2e + \varphi) - \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right)\sin^2\theta\right],$$

au pôle $\sin^2\theta = 0$, à l'équateur $\sin^2\theta = 1$, on aura

$$(9) \qquad g_p = f\frac{\mathrm{M}}{c^2}(1 - 2e + \varphi) = f\frac{\mathrm{M}}{a^2}(1 + \varphi),$$

$$(9') \qquad g_e = f\frac{\mathrm{M}}{c^2}\left(1 - e - \frac{3}{2}\varphi\right) = f\frac{\mathrm{M}}{a^2}\left(1 + e - \frac{3}{2}\varphi\right).$$

En représentant par l la latitude, $\sin^2\theta = \cos^2 l$, on obtient

$$(10) \qquad g = g_e\left[1 + \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right)\sin^2 l\right], \qquad \beta = \frac{5}{2}\varphi - e = e(\eta + 1).$$

La variation de la pesanteur est exprimée par le coefficient de $\sin^2 l$, ou β, qui permet de déterminer e, par les *seules mesures* de g, faites au moyen du pendule, en des lieux de latitudes différentes. On remarquera en effet que la loi des densités ρ, dans (6), a été éliminée au moyen de la première formule de Clairaut, la formule fondamentale (18) du Chapitre X.

159. Démonstration directe de la formule de Clairaut. — Helmert calcule directement le potentiel, comme pour un corps quelconque, qui peut être supposé solide, sans s'occuper des conditions de l'équilibre hydrostatique.

Soit un point fixe $\mathrm{P}(x, y, z)$ ou (r, θ, φ) par rapport auquel on calcule le potentiel et $\mathrm{P}'(x', y', z')$ (r', θ', φ') un point variable de masse élémentaire dm, on aura, l'intégrale étant étendue à tous les points P',

$$(11) \qquad \mathrm{V} = \frac{f}{r}\left(\int dm + \frac{1}{r}\int \mathrm{P}_1 r'\,dm + \frac{1}{r^2}\int \mathrm{P}_2 r'^2\,dm + \ldots\right),$$

P_1 et P_2 sont les polynomes de Legendre d'ordre 1 et 2. mière intégrale donne la masse totale M. On a ensuite

$$(12)\qquad P_1 = \cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

$$(13)\qquad \int P_1 r'\,dm = \frac{x}{r}\int x'\,dm + \frac{y}{r}\int y'\,dm + \frac{z}{r}\int z'\,dm = 0,$$

car les intégrales sont nulles en prenant l'origine au centre de gravité.

$$(14)\qquad P_2 = \frac{9}{4}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right) + 3\sin\theta\cos\theta\sin\theta'\cos\theta'\cos(\psi' - \psi) + \frac{3}{4}\sin^2\theta\sin^2\theta'\cos 2(\psi' - \psi).$$

Or en intégrant par rapport à ψ' de 0 à 2π les termes $\psi' - \psi$ disparaissent. Il reste le premier terme de $P_2 r'^2$ qui s'écrira

$$\frac{3}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta'\right)r'^2 = \frac{3}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\left(z'^2 - \frac{x'^2 + y'^2}{2}\right).$$

L'intégrale portant sur la parenthèse en x', y', z' donne les moments d'inertie $\frac{A + B}{2} - C$, ou $A - C$, dans le cas d'un solide de révolution. On a finalement, en se bornant aux premiers termes du premier ordre

$$(15)\qquad V = \frac{f}{r}\left[M + \frac{1}{2r^2}(1 - 3\cos^2\theta)(C - A)\right].$$

En ajoutant le potentiel relatif à la force centrifuge, on aura pour le potentiel total

$$(16)\qquad U = f\frac{M}{r}\left[1 + \frac{C - A}{2Mr^2}(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{\omega^2 r^3}{2fM}\sin^2\theta\right].$$

La pesanteur est la dérivée normale de U, ou dérivée par rapport à r en première approximation.

$$(17)\qquad g = -\frac{dU}{dr} = f\frac{M}{r^2}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{C - A}{Mr^2}(1 - 3\cos^2\theta) - \frac{\omega^2 r^3}{fM}\sin^2\theta\right].$$

Or le potentiel U est constant à la surface, soit U_0 sa valeur, la valeur du rayon vecteur d'un point de la surface pourra s'écrire

d'après (16)

$$(18)\qquad r = \frac{fM}{U_0}\left[1 + \frac{C-A}{2M}(1-3\cos^2\theta) - \frac{\omega^2 r^3}{fM}\sin^2\theta\right].$$

En représentant par a la valeur d'un rayon quelconque, dans les termes très petits en C — A et en ω^2, et négligeant les termes du second ordre, on pourra écrire le crochet sous forme d'un produit de deux facteurs

$$(19)\quad r = \frac{fM}{U_0}\left(1 + \frac{C-A}{2Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2fM}\right)\left[1 - \left(\frac{3}{2}\frac{C-A}{Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{fM}\right)\cos^2\theta\right].$$

C'est l'expression du rayon vecteur d'un ellipsoïde, dont le rayon équatorial a est l'ensemble des premiers termes et dont l'aplatissement e est le coefficient de $\cos^2\theta$

$$(19')\qquad r = a(1 - e\cos^2\theta).$$

φ étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, on aura ensuite, en identifiant (19) et (19′)

$$(19'')\qquad \varphi = \frac{\omega^2 a^3}{fM}, \qquad \frac{3}{2}\frac{C-A}{Ma^2} = e - \frac{1}{2}\varphi.$$

En portant ces valeurs dans l'expression (17), on obtient

$$(20)\qquad g = f\frac{M}{r^2}\left[\left(1 + e - \frac{3}{2}\varphi\right) - \left(3e - \frac{5}{2}\varphi\right)\cos^2\theta\right].$$

Enfin en remplaçant r^2 par sa valeur (19′), et développant, on retrouvera les formules finales du numéro précédent.

Remarque. — On a vu qu'en première approximation on a remplacé $\lambda^2 = 2e + 3e^2$ par $2e$, ce qui revenait à prendre $1 : e$ au lieu de

$$\frac{1}{e + \frac{3}{2}e^2} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{3}{2}e\right) = \frac{1}{e} - \frac{3}{2}.$$

On commettait donc une erreur de l'ordre de 1,5 sur l'inverse de l'aplatissement. Cela n'avait aucune importance, il y a 50 ans, où Faye montrait que les neuf déterminations principales faites alors laissaient subsister une erreur possible de 6 unités sur l'inverse de l'aplatissement. L'erreur actuelle est seulement de l'ordre des unités

et la précision correspondante des formules exige que l'on tienne compte de la seconde approximation, ou des termes en e^2 dans le développement des formules.

160. Variations de la pesanteur en profondeur. Formule de Saigey. — La variation de la pesanteur en profondeur s'étudie plus simplement que la variation le long d'un méridien. On peut négliger l'aplatissement et écrire

$$(21) \qquad g = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi f \frac{1}{r^2}\int_0^1 \rho\, dr^3 = \frac{4}{3}\pi f \mathrm{D} r.$$

Les formules (3'), n° 119, permettent d'écrire

$$(22) \qquad \frac{dg}{dr} = \frac{4}{3}\pi f(\mathrm{D} + r\mathrm{D}') = \frac{4}{3}\pi f \mathrm{D}\left(3\frac{\rho}{\mathrm{D}} - 2\right).$$

La pesanteur augmentera au-dessous de la surface si la densité superficielle ρ est plus petite que les deux tiers de la densité moyenne D, c'est le théorème de Saigey [1]. La pesanteur augmente jusqu'à la couche où la densité sera égale aux deux tiers de la densité moyenne des couches intérieures à celle-ci. Elle passera alors par un maximum pour décroître ensuite.

Airy a constaté qu'au fond d'un puits de mine de 384^{m} de profondeur un pendule battant la seconde faisait deux oscillations de plus par 24 heures, ce qui indique une densité superficielle plus faible que les deux tiers.

En introduisant dans la loi des densités de Roche les coefficients déterminés dans le chapitre suivant, n° 172, c'est-à-dire ceux qui donnent le même aplatissement théorique 1/297,18 avec les trois formules (17), (18) et (19) de Clairaut, n° 124, on obtient la formule

$$(23) \qquad \rho = 10,41 - 8,18 r^2 \qquad (\rho_1 = 2,23).$$

Elle donne, à la distance r du centre la valeur étant g_1 à la surface, l'expression

$$(24) \qquad g = 1,86 g_1(1 - 0,472 r^2) r.$$

---

(1) *Petite physique du globe*, t. 2, p. 185. *Voir* TISSERAND, *Méc. cél.*, t. 2, p. 244.

D'après cette formule la pesanteur à l'intérieur de la Terre passerait par un maximum égal à 1,04 à une profondeur égale à 0,16 du rayon. On retrouve la valeur de la pesanteur à la surface pour $r = 0,67$, c'est-à-dire à un tiers du rayon en profondeur. Ainsi la pesanteur resterait sensiblement constante, à 4/100ᵉ près, pour plus du tiers du rayon, c'est-à dire pour les 7/10ᵉ de la masse ([1]).

L'expérience d'Airy donnait $\rho_1 = 2,10$ pour la densité superficielle, avec $D_1 = 5,51$. Ces expériences reprises en 1886, en Saxe et en Bohême, par de Sterneck dans un puits de 534ᵐ de profondeur ont donné un accroissement de la pesanteur de 0,0000793, ce qui correspond à une densité superficielle de 1,94 seulement, en prenant 5,51 pour la densité moyenne ([2]) Ces valeurs cadrent à 0,2 près avec celle de la formule (23) ci-dessus. Cependant elles paraissent un peu faibles par rapport à la densité moyenne 2,5 des roches superficielles. On peut rattacher à cette formule celle de Bruns étudiée au nº 34.

161. Variation de la pesanteur avec l'altitude. Formules de Bouguer. Critique de Faye. — La formule (10) de Clairaut donne la variation de la pesanteur en latitude, mais en supposant qu'on reste sur la même surface de niveau, c'est-à-dire la surface des mers prolongée. Or les observations de la pesanteur g, au moyen du pendule, se font sur des continents, à des altitudes variables. Il faut en déduire la valeur de g corrigée, c'est-à-dire la valeur qu'elle aurait si l'expérience était faite sur la surface de niveau elle-même.

Soit g la pesanteur sur la surface de niveau de rayon r, la valeur g' de la pesanteur à la hauteur h (altitude) sera

$$(25) \qquad \frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 = 1 - 2\frac{h}{r} \cdots.$$

Il faut ajouter à g' l'attraction de la masse continentale de hauteur h et de densité ρ située au-dessus de la surface de niveau. On

---

([1]) ALEX. VÉRONNET. *Comptes rendus de l'Ac. Sc.* (*Valeurs de l'aplatissement de la Terre obtenues par le calcul et par les mesures*, t. 171, p. 547).

([2]) *Voir* le compte rendu de ces expériences dans *Bul. ast.*, t. 4, p. 234, et HELMERT, *Geodäsie*, t. 2, p. 499.

démontre qu'en négligeant les irrégularités locales o dérer cette attraction comme celle d'un disque d'épa... rayon indéfini. Cette attraction se réduit à

$$\delta g = 2\pi f \rho h = \frac{3}{2} g \frac{\rho}{D_1} \frac{h}{r} \qquad \left(g = \frac{4}{3}\pi f D r\right). \tag{26}$$

La pesanteur g′ en h s'écrit alors

$$g' = g\left(1 - \frac{2h}{r} + \frac{3}{2}\frac{\rho}{D}\frac{h}{r}\right). \tag{27}$$

Les observations donnent g', on en déduit la valeur corrigée g, par cette formule, due à Bouguer.

L'isostasie conduit à supprimer le dernier terme, et à ne conserver que la correction d'altitude, ou le terme de Faye, formule (25), du nom de l'astronome qui a proposé cette correction. La valeur de ce terme est 0,000.3086h, c'est-à-dire qu'il faut une différence de $3^{m},3$ pour produire sur g une différence de 0,001 de centimètre, qui est à la limite de sensibilité des mesures actuelles.

On peut remarquer que la densité des masses continentales est toujours voisine de 2, 8 environ moitié de la densité moyenne 5, 52. On peut dès lors simplifier la formule (27) qui devient

$$g' = g\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right), \tag{28}$$

formule due également à Bouguer. Elles sont attribuées parfois toutes deux à Young,

Or il se trouve que les valeurs de g cadrent mieux avec la formule de Clairaut, si l'on utilise la formule (25) au lieu de la formule (27), c'est-à-dire si l'on néglige δg ou l'attraction du plateau continental. On en a donc déduit que la somme des masses attractives est à peu près la même le long d'une verticale, que cette verticale soit prise sur un continent, au niveau de la mer, ou en plein océan sur une île. Il y a une *compensation* des masses sous les mers et les continents (Faye). Il s'est établi une égalité de pression des couches superficielles irrégulières sur les couches sous-jacentes, *isostasie* de Pratt. C'est pour cela qu'Helmert a eu l'idée de *condenser* toute la surface sur une couche de niveau située à environ 100^{km} au-dessous. Il a obtenu ainsi des résultats encore plus concordants.

Les données modernes sur les marées de l'écorce nous montrent d'ailleurs que les morceaux de la mosaïque, qui la constituent, ont assez de jeu pour qu'ils aient pu prendre l'équilibre hydrostatique correspondant aux forces *permanentes* de l'attraction et de la force centrifuge.

162. Formule de la pesanteur en seconde approximation. — On a la même formule (1) qu'en première approximation. Il faut développer par contre la formule (2) jusqu'aux termes en e^2 ou λ^4, ce qui donne pour g, au lieu de (3)

$$(29)\qquad g^2 = R^2c^2(1 - \lambda^2\sin^2\theta + 2\lambda^4\sin^2\theta - \lambda^4\sin^4\theta).$$

On extraira la racine carrée pour avoir g, comme dans (3). L'expression R sera donnée par la même formule (4), où l'on prendra tous les termes jusqu'à λ^4. La valeur de l^2 sera prise de même d'après l'équation (27), Chapitre VIII, n° 97, mais en développant jusqu'aux termes en λ^4

$$(30)\quad l^2 = \frac{c^2}{r^2}\lambda^2\left[1 - \left(\lambda_1^2 - \frac{c^2}{r^2}\lambda^2\right)\left(1 - \lambda_1^2 - \frac{c^2}{r^2}\lambda^2 + 2\frac{c^2}{r^2}\lambda^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\right]\ldots$$

En portant cette expression, ainsi que l^3, dans l'équation (4), on a

$$(31)\quad R = \frac{4}{3}\pi f\int_0^1 \rho\, d\frac{c^3}{r^3}(1+\lambda^2)\left[\left(1 - \frac{3}{2}\lambda_1^2\sin^2\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{c^2}{r^2}\lambda^2\left(\sin^2\theta - \frac{2}{5}\right)\right.$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{c^4}{r^4}\lambda^4 + \left(\frac{3}{2}\lambda_1^4 + \frac{c^2}{r^2}\lambda_1^2\lambda^2 - 2\frac{c^4}{r^4}\lambda^4\right)\sin^2\theta$$
$$\left. + \frac{3}{8}\left(\lambda_1^4 - 10\frac{c^2}{r^2}\lambda_1^2\lambda^2 + 9\frac{c^4}{r^4}\lambda^4\right)\sin^4\theta\right].$$

Le terme en $\rho\, dc^2(1+\lambda^2)$ donne D et M, comme en première approximation. Les termes en $\rho\, dc^5(1+\lambda^2)\lambda^2$ sont donnés par la formule (28), n° 149. Les termes en λ^4 seraient donnés par la formule (5), n° 146, en fonction de A, et par conséquent de la déformation de l'ellipsoïde et de γ. Mais ces termes sont très petits, comme on le verra plus loin et on peut les négliger. On remplacera λ^2 par $2e + 3e^2$ et finalement on aura

$$(32)\qquad g = g_p\left[1 - \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right)\sin^2\theta + \beta_1 e^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\beta_2 e^2\sin^4\theta\right],$$

$$\beta_1 = \frac{25}{4}\frac{\varphi^2}{e^2} + \frac{26}{7}\frac{\varphi}{e} - \frac{5}{2},\qquad \beta_2 = 7 - 15\frac{\varphi}{e}$$

et

$$g_p = f\frac{M}{c^2}\left(1 - 2e + \varphi + e^2 - \frac{8}{7}\varphi e - \frac{3}{2}\varphi^2\right),$$

$$g_p = f\frac{M}{a^2}\left(1 + \varphi + \frac{6}{7}\varphi e - \frac{3}{2}\varphi^2\right), \qquad a^2 = c^2(1 + 2e + 3e^2).$$

On aura ensuite pour la pesanteur à l'équateur

(33) $$g_e = f\frac{M}{a^2}\left(1 + e - \frac{3}{2}\varphi - \frac{27}{14}\varphi e + \frac{9}{7}\varphi^2 + e^2\right),$$

(33′) $$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right) - \frac{17}{14}\varphi e.$$

Le dernier terme de (33′) est le terme de correction, introduit par la seconde approximation, dans la variation de la pesanteur, donnée par β. Les termes de correction de (33) s'annulent sensiblement, de sorte que la valeur de la pesanteur à l'équateur reste la même qu'en première approximation.

Ce sont bien les mêmes formules, (38) et (39), n° 6, que donne G. H. Darvin dans son travail cité ci-dessus au n° **157**, sauf qu'il ajoute les termes très petits provenant de la déformation de l'ellipsoïde, termes qui ne peuvent se calculer qu'en faisant choix d'une loi des densités. Il a vérifié lui-même que ses formules sont les mêmes que celles d'Helmert, qu'a étendu à la seconde approximation le calcul direct du n° **159**. Les formules (32) et (33) sont ainsi établies par trois méthodes différentes.

On exprime ordinairement la valeur de g au moyen de la latitude géographique l au lieu de θ. Ces deux quantités sont reliées par l'expression suivante, tirée de l'équation de l'ellipse.

$$\tan g\, l = \frac{z}{x}\frac{c^2}{a^2} = (1 + \lambda^2)\cot\theta, \qquad \sin^2\theta = (1 + 2\lambda^2\sin^2 l + \ldots)\cos^2 l.$$

L'équation (32) s'écrit alors, la valeur de β étant le coefficient de $\sin^2 l$,

(34) $$g = g_e\left[1 + \left(\frac{5}{2}\varphi - e - \frac{17}{14}\varphi e\right)\sin^2 l - \left(\frac{5}{2}\varphi e - \frac{1}{2}e^2\right)\sin^2 l\cos^2 l\right].$$

163. Résultats des observations et formules de g [1]. — La

[1] Les données de ce numéro et de 166 sont empruntées au remarquable travail du général Perrier publié dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, 1926.

valeur de g, adoptée, en 1909, par l'*Association géodésique internationale*, comme répondant le mieux à l'ensemble des observations du pendule, est donnée par la formule de Potsdam

$$g = 978,030(1 + 0,005\,302 \sin^2 l - 0,000\,007 \sin^2 2\,l). \tag{35}$$

C'est la formule donnée par Helmert en 1901. On a seulement modifié légèrement la pesanteur à l'équateur, qu'Helmert avait fixée d'abord à 978,046 cm/sec².

Cette formule donne 980,632 comme valeur de g à la latitude de 45°. Le *g moyen* a été défini par la Conférence internationale des poids et mesures comme égal à 980,665.

Helmert (1901) déduisait de sa formule que l'inverse de l'aplatissement donné par la pesanteur devait être égale à 298,3. En 1884, il avait trouvé 299,26. En 1915, il donnera 296,7, nombre qui tombe parfaitement dans les limites déterminées au chapitre précédent. L'*Union géodésique et géophysique internationale* a adopté, en 1924, le nombre 297,0 pour l'ellipsoïde de référence à employer, avec la valeur $a = 6.378.388^{m} \pm 35$ pour la valeur du rayon équatorial de la Terre.

En 1910, Hayford donnait pour la réduction des observations américaines trois nombres qui lui paraissaient également probables, et qui différaient seulement par la profondeur de la couche de compensation admise dans les calculs : 296,3 pour 162^{km}, 297,0 pour 121^{km} et 297,1 pour 114^{km}. Il adoptait 297,0. Son successeur, Bowie, en 1912, aboutissait à 298,4 ± 1,5 et à 297,4 en 1917.

En 1924, Heiskanen en Finlande détermine l'aplatissement par une méthode légèrement différente et aboutit à six formules, qui lui donnent des aplatissements compris entre 293,8 et 299,8.

164. Calcul de l'aplatissement donné par les mesures de la pesanteur. — On peut calculer directement les termes du second ordre en e^2 et φe dans la formule (34). Dans cette formule, on n'a pas tenu compte de la déformation de l'ellipsoïde définie par γ, n° 147 (8). Pour en tenir compte, comme l'a fait Darwin, il faut ajouter, dans le coefficient de $\sin^2 l$, un terme égal à $-\frac{2}{7}f$ où $f = 4\gamma e^2$ ou 0,000.002. Ce terme est donc égal à + 0,000.000.6,

et négligeable, car les formules, comme (35), ne donnent que la sixième décimale, qui reste même très douteuse.

Pour le coefficient de $\sin^2 l \cos^2 l$, on aurait

$$\frac{5}{2}\varphi e - \frac{1}{2}e^2 - 3f = (29 - 6 + 6)10^{-6} = 29 \times 10^{-6},$$

c'est ce nombre, divisé par 4, qui donne le coefficient de $\sin^2 2l$ dans (35), et qui est conservé dans toutes les formules analogues de g, car il est donné par la théorie, et non par les observations, qui ne sont pas assez exactes pour en donner une bonne valeur. En négligeant le terme en f, on aurait 6×10^{-6} pour le coefficient de $\sin^2 2l$ au lieu de 7, et la formule représenterait aussi bien les observations. On pouvait donc comme on l'a fait au nº 162 et dans la formule (34) négliger la déformation de l'ellipsoïde. M. Wavre n'a pas donné de ce terme en $\sin^2 2l$ l'expression si simple en e et φ [ni pour β(33') non plus], mais seulement deux limites assez éloignées 20 et 40×10^{-6}.

Le coefficient de (35) ou g_e, pesanteur à l'équateur, permet d'abord de calculer φ par la formule

$$(36) \qquad \frac{1}{\varphi} = \frac{g_e}{\omega^2 a}, \qquad \frac{1}{\omega} = \frac{86.400}{2\pi}\,\frac{365,24}{366,24} = 13713,4.$$

La vitesse de rotation est définie par le jour *sidéral*, la rotation vraie de la Terre. Il faut donc multiplier par le rapport des secondes, ou des années, sidérale et solaire.

Alors, dans le système de l'*Union*, avec $g_e = 978,030$ et $a = 6.378.388^{\text{m}}$ on obtient $1 : \varphi = 288,36$. La valeur enciennement adoptée était 288,38, nº 137. Le coefficient de $\sin^2 l$ dans (35) donne ensuite la valeur de l'aplatissement déduite des mesures du pendule. On trouve $1 : e = 296,91$ en première approximation, et en seconde 298,16. La valeur admise par l'*Union*, d'après les mesures géodésiques est au contraire 297,0.

La valeur de première approximation est seulement corrigée par le terme $\frac{17}{14}\varphi e = 14 \times 10^{-6}$, ou $1,26e^2$ du coefficient de $\sin^2 l$ dans (24). Ce coefficient donnait donc $e(1 + 1,26e)$ au lieu de e, en première approximation, c'est-à-dire $\frac{1}{e}(1 - 1,26e)$, au lieu

de $\frac{1}{e}$. L'inverse de l'aplatissement est donc bien augmenté de 1,26 en seconde approximation.

Il est très important de voir comment varient ces valeurs de φ et de e avec les données g_e, a et β.

La formule (36) donne, pour la variation de φ,

$$(37) \qquad \delta\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\omega^2 a}\,\delta g_e - \frac{g_e}{\omega^2 a^2}\,\delta a = 0,32\frac{\delta g_e}{cm} - 0,05\frac{\delta a}{km}.$$

Ainsi $1:\varphi$ varie de 0,05, c'est-à-dire de 288,36 à 288,41, quand on passe du rayon de l'*Union* à celui de Bessel 6.377.397^{m}, déjà très ancien, qui en diffère de 1^{km}. La première valeur de φ est sans doute exacte à 0,02 près.

La valeur de $1:\varphi$ ne varierait que de 0,32 pour une erreur de 1^{cm} sur g_e. Si l'on prend la valeur maximum de g_e donnée par Heiskanen de Finlande, 978,052, celle de $1:\varphi$ ne varierait que de 0,007, quantité négligeable. Sa valeur reste exacte à la même approximation que ci-dessus.

Le coefficient β de $\sin^2 l$, qui détermine e permet de déterminer également ses variations. On a

$$(38) \qquad \beta = \frac{5}{2}\varphi - e - \frac{17}{14}\varphi e, \qquad \delta e = \frac{5}{2}\delta\varphi - \delta\beta.$$

Les variations du terme du second ordre sont négligeables. On pourra écrire avec les variations des inverses de e et φ

$$(39) \qquad \delta\frac{1}{e} = \frac{5}{2}\frac{\varphi^2}{e^2}\,\delta\frac{1}{\varphi} - \frac{\delta\beta}{e^2} = 2,67\,\delta\frac{1}{\varphi} - 0,09\times 10^6\,\delta\beta.$$

Nous avons vu que l'erreur sur $1:\varphi$ pourait être tout au plus de 0,02, ce qui peut entraîner une erreur maximum de 0,053 sur $1:e$ et par conséquent négligeable. *La valeur de l'aplatissement e n'est donc pas influencée par les erreurs possibles sur φ, c'est-à-dire sur g_e ou sur a.*

La formule de Bowie (1927) avec $\beta = 0,005.294$ donne 297,40. L'écart avec la valeur de l'*Union* 298,16 est de 0,76 pour $\delta\beta = 8\times 10^{-6}$, ce qui donnerait 0,72 d'écart, d'après (38). La formule d'Hayford (1912) avec $\beta = 0,005.304 \pm 17$ donnerait $1:e = 298,40$ avec une erreur possible de 1,5 correspondant à celle de β de $\pm 17\times 10^{-6}$.

Pour abaisser à 297,0 valeur de l'*Union*, celle qui est donnée par la formule de Potsdam (35) il faudrait abaisser le coefficient de $\sin^2 l$ de 13 unités du 6e ordre et prendre $\beta = 0{,}005.289$. La valeur de Heiskanen (1924) $\beta = 5285 \times 10^{-6} \pm 6$ donnerait $1 : e = 296{,}64 \pm 0{,}54$. C'est celle qui cadre le mieux avec les limites de l'aplatissement *moyen*, données par φ et J, la pesanteur et la précession, n° **152**. La même année, de Sitter donnait la valeur 296,92 pour l'inverse de l'aplatissement déduit des valeurs *corrigées* de la précession.

Il faut remarquer ici que l'aplatissement donné par la précession, action de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre, est un *aplatissement moyen*. Les déterminations par la géodésie ou le pendule donnent l'*aplatissement local* sur un méridien, ou tout au plus sur une aire correspondant à un continent. Il y a avantage, au point de vue de la précision scientifique à calculer et conserver séparément ces valeurs locales, qui peuvent déterminer les divergences réelles des bosses locales du géoïde.

165. Calcul de la masse et de la densité moyenne de la Terre. — La formule (33) du n° **162** permet de calculer la masse de la Terre M, en tenant compte de son aplatissement. On en déduit ensuite la densité moyenne.

Dans cette formule les valeurs du second ordre donnent $(26 - 23) \times 10^{-6}$ et se détruisent sensiblement. La valeur de M obtenue sera donc la même que celle qu'on aurait en première approximation, formule (9'), n° **158**,

$$(40) \qquad M = \frac{g_e a^2}{f\left(1 + e - \frac{3}{2}\varphi\right)} = 5{,}979 \times 10^{27} \text{gr.},$$

où a pris pour g_e et a les valeurs adoptées par l'*Union*, n° **164**, en traduisant a en centimètres, système G. G. S. prenant pour la constante de l'attraction, $f = 6{,}667 \times 10^{-8}$. La parenthèse est égale à 1,00183. Si l'on considérait la Terre comme sphérique, sa masse, calculée d'après la pesanteur, serait diminuée dans le rapport de 0,002 environ et égale à $5{,}968 \times 10^{27}$ gr. On peut prendre 6×10^{27} gr. en nombre rond.

La densité moyenne D sera donnée ensuite par la formule

$$(41)\qquad M = \frac{4}{3}\pi a^2 c D = \frac{4}{3}\pi a^3 D(1-e), \qquad D = 5,519.$$

On peut prendre en nombre rond 5,52. En considérant la Terre comme sphérique on aurait 5,49.

Les données des deux formules sont connues avec 4 et 5 chiffres, la constante de Cavendish étant la moins précise. On peut compter à peu près sur les 4 chiffres du résultat, le quatrième étant douteux.

Remarques. — M. Dive, dans sa thèse, n° 100, formule (130), découvre la formule (9′), de g_e, par un long détour, après avoir appliqué l'intégration à la loi des densités de Roche. Il montre même, ce qui est nouveau, comment, au moyen des valeurs de g, de la densité moyenne et d'un rayon terrestre, on peut en déduire une *valeur de la constante de la gravitation* f, aussi précise que celle qui est donnée par les mesures physiques. Ceci étonnera fort les physiciens, qui pensent, sans doute avec quelque raison, que cette constante purement physique f ne peut être déterminée que par des expériences physiques, et non par des formules purement mathématiques. J'ai bien peur en effet que M. Dive n'ait introduit lui-même cette valeur de f dans sa formule, par mégarde, avec la valeur de la densité moyenne, qui a été déterminée comme il est dit dans la remarque ci-dessus. Cette démonstration du n° 100 termine une thèse, dont la première démonstration, au n° 1, peut faire l'objet d'une remarque analogue, indiquée au n° 45 de cet Ouvrage, avec d'autres remarques aux n°s 78 et 91 pour le reste du travail.

166. Isostasie et réduction des observations du pendule. — Les deux formules de Clairaut, qui déterminent l'aplatissement de la Terre d'après l'attraction ou φ, n° 124, (18) ou d'après la pesanteur, ou g, n° 158, (10), sont établies dans l'hypothèse d'une masse fluide, dont la surface est une surface de niveau, c'est-à-dire une surface d'égale densité. Or la surface de la Terre n'est pas fluide, sauf les mers, et de plus sa densité est très variable, depuis celle de l'eau, jusqu'à celle des roches les plus lourdes, voisine de 3. Il est donc nécessaire d'adapter les formules à la réalité.

De plus les mesures géodésiques, ou les observations du pendule ne sont pas faites sur la surface de niveau elle-même, le géoïde, mais sur la surface réelle, qui se trouve à une altitude plus ou moins élevée au-dessus de celle-ci. Nous avons vu au n° 161 comment les formules de Bouguer corrigeaient la pesanteur de l'altitude et de l'attraction des masses situées au-dessus du géoïde, pour la ramener au niveau de la mer.

Cette correction de Bouguer devrait être nécessaire et suffisante si les surfaces d'égale densité, au-dessous de la surface du géoïde, étaient aussi des surfaces d'égale densité. Il faudrait pour cela que la densité des roches fut partout égale à une même profondeur. Or cela n'est pas, puisqu'il y des océans très profonds et des roches de différentes densités, inégalement réparties. Il doit s'en suivre nécessairement que la pesanteur observée ne suivra pas les formules de Clairaut ni en direction ni en grandeur. Il faudra expliquer ces déviations par des hypothèses sur la répartition des roches de l'écorce terrestre, et la vérification de ces hypothèses nous renseignera sur cette répartition.

Déjà Bouguer (1749) avait calculé la correction introduite dans ses observations par la masse du Chimborazo, 6000^{m} d'altitude, dans les Andes équatoriales. Il avait trouvé que la valeur calculée ainsi était trop forte et il en avait déjà conclu qu'il devait y avoir, au-dessous de la surface du géoïde un *défaut de masse*, qui compensait l'excès de masse situé au-dessus. Bouguer introduisait ainsi la *correction topographique*, due aux masses voisines, et qui n'était pas comprise dans les deux termes de sa formule, et en même temps la notion de compensation ou d'isostasie.

Airy (1855) est le premier qui essaie une explication théorique de ce phénomène. Il regarde les morceaux de l'écorce terrestre, comme flottant sur un magma fluide plus dense. En particulier les continents seraient formés de roches plus légères s'élevant davantage au-dessus du niveau moyen et s'enfonçant plus profondément au-dessous. Idée un peu simpliste reprise par Wegener dans sa théorie de la *dérive des continents.*

La même année, Pratt montrait que, dans le massif de l'Himalaya, l'action des montagnes devait introduire des déviations considérables, alors qu'à l'observation elles étaient presque nulles, 1″ au lieu de 58″ et 77″. Il développait alors sa *théorie de la compensa-*

tion, d'après laquelle la pression de l'écorce devait être partout la même sur la surface niveau fluide sous-jacente, le poids total de cette écorce devait être également partout le même, sous les océans comme sous les continents. L'épaisseur plus grande sous ces derniers devait être compensée par une densité moyenne plus faible. Comme la densité superficielle était la même en plaine qu'en montagne, il fallait même qu'il y eut sous les montagnes des roches de *densité plus faible* qu'à la surface même.

Faye (1880) montra que les observations sont mieux représentées, en ne retenant, dans la formule de Bouguer, que la correction de l'altitude, *terme de Faye*, et en négligeant l'autre terme, ou l'attraction de la masse située entre la station d'observation et le niveau de la mer. C'était en somme admettre la compensation de masse en dessous.

Helmert (1884) précisait l'application de ces idées en les généralisant. Il étendait les corrections de Bouguer non plus jusqu'au niveau de la mer, qui ne pouvait pas être une surface de niveau d'égale densité, mais jusqu'à la surface de niveau hydrostatique au-dessous de l'écorce. Il ramenait ou condensait les observations à ce niveau, d'où le nom de *méthode de condensation*.

C'est Hayford enfin (1909), qui appliqua complètement au continent nord américain la méthode de Pratt, en étendant le calcul des corrections jusqu'à plus de 4000^{km} du lieu de chaque observation, jusqu'à plus de 100^{km} de profondeur au-dessous du niveau de la mer; ce qui était nécessaire pour tenir compte du chiffre des millièmes dans les observations.

Il partage, sur une carte, le sol environnant la station en 38 couronnes circulaires, elles-mêmes partagées en 16 secteurs, d'où au total 608 compartiments. Une formule de Clarke, analogue à celle de Bouguer, donne la correction d de la verticale due à un compartiment donné

$$d = 12'' 44 \frac{\delta}{D} h(\sin\alpha - \sin\alpha') \log\frac{r}{r'} = 0{,}001 h, \tag{42}$$

où δ est la densité de l'écorce, D la densité moyenne de la Terre, h la hauteur moyenne du compartiment au-dessus du niveau de la mer, r, r' les rayons des couronnes et α, α' les azimuts, qui limitent le compartiment. Le compartimentage est fait de façon

que le coefficient de h soit constant et égal à 0,001, quand h est exprimé en milles. La densité de l'écorce est prise constante.

La correction a été faite d'abord pour les masses situées au-dessus du niveau de la mer, *correction topographique*. On a constaté que les déviations et écarts restaient considérables, et plus grands qu'en supprimant cette correction et en ne conservant que le terme de Faye.

Hayford a repris les calculs en les étendant à toute la masse de de l'écorce, au voisinage de la station d'observation, jusqu'à la même distance 4000^{km}, en appliquant la théorie de la compensation. Pour cela il suppose que la densité des roches continentales, au-dessus du niveau de la mer, est la même que la densité moyenne de l'écorce, mais sous les continents elle serait *diminuée* d'une quantité variable δ_1. En appelant $-h_1$ la profondeur de la couche de concentration, on aura $\delta_1 h_1 = -\delta h$, et la correction d_1 donnée par la couche sous-jacente sera la même que la correction topographique d changée de signe. Il y a seulement une légère modification du terme $\log \frac{r}{r'}$, où s'introduit la profondeur h_1, sans quoi la correction topographique serait purement et simplement supprimée par la compensation. Les écarts entre les observations et les formules théoriques sont ainsi ramenés au dixième de leur valeur, ce qui justifie remarquablement l'hypothèse faite.

La profondeur de la surface de condensation, qui donne les moindres écarts oscille entre 80 et 120^{km}, ce qui paraît un peu considérable. Heiskanen (1924), en employant une méthode qui rappelle davantage l'hypothèse d'Airy, trouve des nombres plus bas, descendant à 50 et même 35^{km}, qui paraissent beaucoup plus plausibles.

167. Température et pression. Conditions physiques au-dessous de l'écorce. Propriétés réunies des liquides et des solides. — La température du sol en effet croît de 1° par 33^{m} en moyenne. On trouverait déjà 900°, température de fusion des roches à 30^{km} de profondeur et, par conséquent, une surface de niveau fluide en équilibre hydrostatique. Il est vrai que le degré géothermique doit diminuer avec la profondeur, autrement la température serait voisine de 200000° au centre. Henri Poincaré montre, dans les

Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, n° 155, que la Terre étant primitivement à une température T_1, il y a un temps t, le degré géothermique doit avoir, à une profondeur x, une valeur donnée par la formule

$$(43) \qquad \frac{dT}{dx} = \left(\frac{dT}{dx}\right)_0 e^{-\alpha x^2}, \qquad \left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = \frac{T_1}{\sqrt{\pi k t}}, \qquad \alpha = \frac{1}{4kt}.$$

$\left(\frac{dT}{dx}\right)_0$ est la valeur du degré géothermique à la surface, qui dépend de T_1 de t et de k défini par la conductibilité du sol. La température est donnée par l'intégrale de l'exponentielle de Gauss, qui se retrouve dans les probabilités et dont on a dressé des tables. A 80^{km} de profondeur on retrouverait déjà la température centrale T_1 à 0,001 près. Le refroidissement serait donc tout à fait superficiel. On retrouverait la température de 900° à 37^{km} de profondeur en admettant 1200°, comme température initiale et centrale, et à 30^{km}, en admettant 3000°. On peut considérer ces deux températures, comme des limites, qui indiqueraient une fusion probable entre 30 et 40^{km}.

De plus les roches de l'écorce subissent la pression de toute la masse qui est au-dessus et cette pression augmente de $2^{kg},5$ tous les 10^m, en admettant une densité de 2,5 et de 2500^{kg} par centimètre carré à une profondeur de 10^{km}. Toutes les roches sont écrasées et réduites à l'état de sable, ou de poussière sans cohésion, sous de telles pressions. Par conséquent, même s'il n'y avait pas élévation de température ni fusion des roches de l'écorce, on trouverait à partir de 30 ou 40^{km} un état physique sans cohésion, où s'établirait un véritable équilibre hydrostatique, où la pression serait la même sur toute surface de niveau, autrement les pressions latérales produiraient des glissements qui rétabliraient l'équilibre.

On sait que les très fortes pressions produisent le même effet sur les métaux les plus durs, qui « fluent » comme des matières visqueuses, et prennent les propriétés des liquides. Inversement, sous les mêmes pressions, les liquides acquièrent une véritable rigidité mécanique, les molécules étant serrées les unes contre les autres par des forces plus grandes que la cohésion solide.

Il est donc vain de se demander ou de prétendre que l'intérieur de la Terre est solide ou liquide. Elle peut posséder des propriétés contradictoires, ou qui nous paraissent telles, la fluidité de l'eau et

la rigidité de l'acier, obéir comme un liquide aux variations lentes des marées, transmettre comme un solide les vibrations rapides des séismes, sous forme de vibrations transversales aussi bien que longitudinales, produire une réflexion de ces ondes à une certaine profondeur par simple accroissement de rigidité sans que la nature du milieu ait changé, etc.

168. **Lois de densités applicables à l'écorce. Action de soulèvement des gaz internes.** — Quant à l'écorce, on peut voir aussi qu'une épaisseur de 30 à 40^{km} peut être suffisante pour établir l'équilibre isostatique par la compensation des masses.

Désignons par H la profondeur, où se trouve cette surface de compensation, par D la densité moyenne de l'écorce, h l'altitude moyenne d'un plateau ou d'un massif, $D - \delta$ sa densité moyenne au-dessus de la surface de compensation, l'égalité des poids au-dessus de cette surface donnera la relation entre h et δ,

$$(44) \qquad HD = (H + h)(D - \delta), \qquad \frac{h}{H} = \frac{\delta}{D},$$

en négligeant le produit $h\,\delta$, assez petit.

On peut considérer que le maximum de h ne dépasse pas 4000^m, car le poids des cimes plus élevées se répartit sur une base assez large pour ramener la moyenne h dans ces limites. En faisant $D = 2{,}70$, il suffira de diminuer la densité moyenne de la quantité $\delta = 0{,}36$ et de prendre $D - \delta = 2{,}34$, pour que la compensation ait lieu à une profondeur de $H = 30^{km}$. Il suffira de prendre une densité intermédiaire entre ces deux valeurs 2,34 et 2,70 pour obtenir toutes les hauteurs d'équilibre de 0 à 4000^m. Pour $H = 40^{km}$ on aurait $D - \delta = 2{,}43$ pour $h = 4000^m$. On obtiendrait une formule et des nombres analogues pour les couches sous-marines avec une densité $D + \delta'$.

Nous aurons une représentation plus exacte de la compensation isostatique, en partant de la densité D_1 de cette surface de condensation située à la profondeur H, et en admettant que la densité ρ varie d'une façon continue avec la distance x à cette surface, suivant la loi, analogue à celle de Roche,

$$(45) \qquad \rho = D_1\left[1 - \alpha\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right], \qquad \rho_1 = D_1(1 - \alpha),$$

α et n sont deux paramètres variables, $x_1 = \text{H} + h$ est la hauteur au-dessus de la surface de compensation, h l'altitude, ρ_1 la densité à la surface, où $x = x_1$.

L'intégrale de $\rho\, dx$ de o à x_1 donne le poids par centimètre carré, ou la pression en chaque point sur la surface de compensation. C'est une constante qui peut s'écrire en supprimant D_1 facteur commun et en faisant $n = 1$ pour $h = 0$,

$$(46)\qquad x_1\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) = (\text{H} + h)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) = \text{H}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_0\right).$$

Dans le cas plus simple $n = 1$, la densité varie partout linéairement. En désignant par ρ_{01} la densité superficielle pour $h = 0$ et remplaçant α et α_0 en fonction de ρ_1 et ρ_0, on obtient

$$(47)\qquad h(\text{D}_1 + \rho_1) = (\rho_0 - \rho_1)\text{H}, \qquad \rho_1(\text{H} + h) = \rho_0 \text{H} - \text{D}_1 h,$$

relations qui définissent h en fonction de ρ_1 et réciproquement. Pour un plateau de 4000^{m} d'altitude sa densité superficielle devrait s'abaisser à 2,20 pour $\text{H} = 40^{\text{km}}$, 2,36 pour $\text{H} = 60^{\text{km}}$, 2,43 pour 80^{km}, et 2,52 pour 100^{km}. Il faut admettre une profondeur assez grande de la surface de compensation pour que la densité superficielle ne soit pas trop faible.

Admettons au contraire, comme dans les calculs de Hayford, que la densité superficielle ρ_1 est partout la même; donc α constant d'après (46), n sera variable. Prenons $n = 1$ pour $h = 0$, c'est-à-dire au niveau du géoïde, la valeur maximum de h sera donnée par $n = 0$ et la formule

$$(48)\qquad h = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\text{H} = \frac{\text{D}_1 - \rho_1}{2\rho_1}\text{H}, \qquad \rho_1 = \text{D}_1 \frac{h}{\text{H} + 2h}.$$

En faisant $\text{D}_1 = 3{,}0$ et $\rho_1 = 2{,}50$, on aura $\text{H} = 10h$ et la surface de compensation serait à une profondeur de 40^{km} seulement pour un plateau de 4000^{m} d'altitude, considéré comme maximum.

Pour la variation de la densité au-dessous d'une profondeur p de la mer, on aura une relation constante, analogue à celle ci-dessus (46), qui donne le maximum de p pour $n = \infty$,

$$(49)\qquad (\text{H} - p)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) + \frac{p}{\text{D}_1} = \text{H}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right), \qquad p = \frac{1}{2}\,\frac{\text{D}_1 - \rho_1}{\text{D}_1 - 1}\text{H}.$$

On trouve un maximum de $p = 5^{\text{km}}$ pour $\text{H} = 40^{\text{km}}$, avec les mêmes densités que ci-dessus.

On voit donc que l'on pourrait réaliser l'isostasie, avec une densité superficielle partout la même, densité qui irait toujours en croissant, suivant une loi très simple, jusqu'à ce que les couches d'égale densité coïncident avec les surfaces de niveau sur la surface de condensation. La densité en chaque point ne dépend que d'un seul paramètre. Les corrections introduites pour chaque compartiment géographique peuvent donc se calculer en fonction de ce seul paramètre, qui peut être l'altitude moyenne h de ce compartiment. On pourrait se rendre compte alors si l'hypothèse d'une densité croissante à partir de la surface permet d'expliquer les écarts des observations géodésiques ou gravimétriques avec la théorie.

On a vu qu'Hayford au contraire avait fait ses calculs en admettant une *diminution de densité*, au-dessous de la surface du géoïde, sous les continents et les massifs montagneux, les résultats vérifient complètement l'hypothèse faite. Comment expliquer le fait? Les bolides, qui sont probablement des morceaux de noyaux de comètes, contiennent des gaz occlus, dont la pression atteint 60^{kg}. La Terre et les planètes ont été formées des mêmes éléments. Ces gaz, dissous dans la matière fluide du noyau, sont remontés lentement à la surface, ont provoqué les immenses éruptions volcaniques de la période tertiaire, au temps où l'écorce était encore peu épaisse, ont soulevé les montages en formant au-dessous une voûte de laves spongieuses, analogues à la pierre ponce et de plus faible densité que les roches superficielles. Ces gaz sous forte pression s'échappent encore des volcans en pulvérisant à l'air libre, sous forme de cendres ou de lapilli, les laves où ils étaient emprisonnés.

Quand, à l'origine, les molécules de tous les astres étaient dispersées dans l'espace, qui était alors à la température du zéro absolu, puisqu'il n'y avait ni Soleil ni étoiles, elles se soudaient les unes aux autres à chacun de leurs chocs, comme se condense toute vapeur, métallique ou autre, au-dessous de son point d'ébullition. Elles se sont agglomérées ainsi en poussières solides, puis en météorites, mélanges de fer, de pierres et de gaz, qui se sont condensées ensuite en planètes et en étoiles, puis celles-ci en amas d'étoiles et en amas d'amas.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DE DIFFÉRENTES LOIS DE DENSITÉS AU PROBLÈME.

---

169. Contenu du Chapitre. — Le théorème de Stokes, n° 116, nous apprend que le potentiel à la surface, et les quantités qui en dépendent, comme la pesanteur g, sont indépendantes de la distribution interne des densités. De même les limites de l'aplatissement, n° 125, 152, déduites de l'équation de Clairaut et d'Alembert par la transformation de Radau, sont indépendantes des lois de densités. Elle ne peuvent donc pas nous renseigner sur cette distribution interne, mais si nous appliquons directement une loi de densités à la formule de Clairaut et à celle de d'Alembert, nous obtiendrons deux séries de valeurs pour l'aplatissement. La valeur commune devra tomber entre les limites théoriques et les vérifier.

De plus, chaque valeur commune définira les paramètres de la loi des densités, qui conviennent seuls. On déterminera donc ainsi une valeur de la *densité superficielle*, et une seule, pour chaque loi de densité. On pourra donc juger ainsi de celle qui conviendra le mieux.

La densité des roches superficielles est voisine de 2,5, mais elle varie assez vite et, au-dessous de la couche de scories des roches sédimentaires, la densité des roches primitives est supérieure à 2,7. La formule de Roche donne 2,23, valeur un peu faible. Nous verrons les lois qui donnent des valeurs meilleures.

170. Lois des densités de Lipschitz et de Roche. — Cette formule, qui exprime la loi des densités à l'intérieur d'une planète peut s'écrire

$$(1) \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^n), \qquad \rho_1 = \rho_0(1 - \alpha),$$

où ρ_0 est la densité centrale, ρ_1 la densité superficielle, α et n deux paramètres. Le rayon vecteur r de la couche de densité ρ est mesuré en prenant le rayon total pour unité. La formule contient donc trois paramètres. Elle est à la fois assez simple et assez souple pour permettre d'effectuer des calculs numériques complets et de les appliquer successivement aux différentes hypothèses, en modifiant convenablement les paramètres. La loi de Roche en est un cas particulier en faisant $n = 2$.

La densité moyenne, à l'intérieur de la couche de rayon r (D_1 densité moyenne totale, $r = 1$) sera donnée par

$$(2) \qquad D = \rho_0\left(1 - \frac{3\alpha}{n+3}r^n\right), \qquad D_1 = \rho_0\left(1 - \frac{3\alpha}{n+3}\right).$$

Pour $n = 1$ la variation des densités est linéaire. Pour $n > 1$, la courbe des densités tourne sa concavité vers le bas. La densité tend vers la limite ρ_0 au centre. Cette limite tend vers D_1, et l'ensemble tend vers l'homogénéité, avec augmentation brusque de la densité vers la surface, quand n augmente indéfiniment.

Pour $n < 1$ la courbe des densités tourne sa concavité vers le haut, avec une pointe au centre. L'accroissement de la densité, d'abord lent vers la surface se fait de plus en plus rapidement vers le centre. Il y a concentration d'autant plus prononcée que n est plus voisin de 0. Mais cette concentration tend vers une limite et n'est jamais totale. C'est une des faiblesses de la formule, qui ne peut pas comprendre la généralité des cas.

La plupart des calculs faits par les différents auteurs l'ont été avec cette formule. En mettant un exposant à la parenthèse, comme l'a fait M. Lévy, on obtient une formule plus générale, à 4 paramètres, qui permet de résoudre certains cas, qui avaient échappé à la loi de Lipschitz, n° 176.

En introduisant la fonction ζ de Lipschitz et Tisserand, les différentes valeurs seront exprimées en fonction du rapport $\rho_1 : D_1$ des deux densités

$$(3) \qquad \zeta = 3\left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right), \qquad \frac{\rho_0}{D_1} = 1 - \frac{\zeta}{n},$$

on a encore

$$(4) \qquad \alpha = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\zeta}{3}\,\frac{n+3}{n+\zeta},$$

on exprime ainsi α et ρ_0, les deux paramètres, en fonction de ζ et n.

On peut exprimer de même l'intégrale importante $\rho\, dr^5$, rencontrée dans les différentes formules,

$$(5)\qquad \frac{F_1}{D_1} = \frac{1}{D_1}\int_0^1 \rho\, dr^5 = 1 - \frac{2}{3}\,\frac{\zeta}{n+5}.$$

En introduisant la fonction η de Radau, dont la formule à la surface sera donnée par la loi des aplatissements, les formules de Clairaut et d'Alembert (18), (17) et (19), n°s 123 et 124, s'écriront

$$(6)\qquad e_\varphi = \frac{\varphi}{2}\,\frac{5}{\eta+2}, \qquad e_J = J\,\frac{F_1}{D_1}\,\frac{3}{3-\eta},$$

$$(7)\qquad e_{\varphi J} = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}\,J\,\frac{F_1}{D_1},$$

où les indices montrent que l'aplatissement est déterminé au moyen de φ, de J ou de φ et J.

171. Application au calcul des formules fondamentales de Clairaut et de d'Alembert. — Avec la loi de densités ci-dessus, la loi des aplatissements, développée suivant les puissances de n, peut s'écrire

$$(8)\qquad e = e_0(1 + \beta_1 r^n + \beta_2 r^{2n} + \ldots), \qquad e_1 = e_0(1 + \beta),$$

en transportant cette valeur de e et celle de ρ dans la formule générale de Clairaut (2) n° 119, comme il est indiqué au n° 126, on obtient l'expression de la vitesse de rotation ω^2 en fonction de r. Puisque cette expression est constante il faut annuler tous les coefficients des puissances de r. On peut également tirer e', e'' de (8), porter ces valeurs dans l'équation différentielle de Clairaut, formule (11), n° 121, et annuler de même tous les coefficients des puissances de r. On obtient la relation suivante entre deux coefficients successifs de (8).

$$(8')\qquad \beta_i = \beta_{i-1}\left(1 - \frac{1}{i}\,\frac{n+3}{in+5}\right)\frac{\zeta}{n+\zeta}.$$

Posons

$$\frac{\zeta}{n+\zeta}\,r^n = x, \qquad ab = \frac{2}{n}, \qquad a+b = \frac{5+2n}{2}, \qquad c = \frac{5+n}{n},$$

on voit alors que l'expression de e, obtenue comme loi des apla-

tissements intérieurs, est une série hypergéométrique, qui s'écrit

(9) $$e = e_0 \,\mathrm{H}(a, b, c, x) = e_1 \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1},$$

on en déduit la valeur de η qui est donnée par une autre série

(10) $$\eta = \frac{re'}{e} = \frac{r\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{2n}{n+5} \frac{\mathrm{H}(a+1, b+1, c+1, x)}{\mathrm{H}(a, b, c, x)} \frac{\zeta}{n+\zeta} r^n.$$

On peut donner de η une formule plus rapidement convergente, rendant possible ces calculs numériques, avec les différentes lois de densités, de façon à obtenir même six chiffres exacts pour l'inverse de l'aplatissement (¹).

En effet l'intégrale des formules de Clairaut, intégrée par parties, pour redonner les formules en $d\rho$, donne

(11) $$\int_0^1 \rho \, der^5 = e_1 \rho_1 - \int_1^0 er^5 \, d\rho = e_1 \rho_1 m,$$

(12) $$\begin{cases} m = 1 + \dfrac{n+3}{n+5} \dfrac{\zeta}{3-\zeta} \dfrac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta}, \\ \beta' = \dfrac{\beta_1}{2n+5} + \dfrac{\beta_2}{3n+5} + \ldots, \end{cases}$$

où β' est une série qui peut s'écrire sous forme de série hypergéométrique

(13) $$1 + (n+5)\beta' = \mathrm{H}(a, b, c+1, x).$$

Cette valeur de l'intégrale permettra, au moyen de l'équation générale de Clairaut, d'exprimer la valeur de η_1 à la surface sous la forme suivante, pour le calcul de e dans (6),

(14) $$\frac{\eta_1}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5} \frac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta}.$$

Or cette série est beaucoup plus rapidement convergente que celle donnée par (10). Par exemple le sixième terme de l'une est 0,01170 et le sixième de la seconde est 0,00010. La convergence est même beaucoup plus rapide que celle de l'expression transformée par Tisserand, expression R, formule (29), n° **141**.

(¹) A. VÉRONNET, *Thèse* (*Journal de math. pures et appl.*, 1912, Chap. VII).

172. Résultats numériques, aplatissement et densité superficielle. — Nous donnons ici les trois séries d'aplatissements calculés au moyen de cette relation et des trois formules (6), (7), dans le cas de la loi des densités de Roche, pour $n = 2$, en prenant pour la densité superficielle des valeurs entières comprises entre zéro et D_1, densité moyenne,

ρ_1....	0.	1.	2,	3.	4.	5.	5,56.
$1:e_\varphi$...	350,19	325,95	302,83	280,90	260,23	240,91	230,70
$1:e_J$...	279,86	289,01	295,79	300,57	303,61	305,09	305,31
$1:e_{\varphi J}$..	318,73	308,79	299,44	290,65	282,36	274,54	270,34

D'autres séries ont été calculées pour les valeurs de n allant de $\frac{1}{2}$ à 7. On a $\rho_1 = 0$ pour $n = 6,25$, il est donc inutile de considérer les valeurs plus grandes de n, au moins pour la Terre. En portant la densité superficielle ρ_1 en abscisse, l'inverse des aplatissements $1:e$ en ordonnées, de 230 à 330, on obtient trois faisceaux de courbes, qui convergent en trois points quand on se rapproche de l'homogénéité, c'est-à-dire pour la valeur $\rho_1 = D_1 = 5,56$, ancienne valeur de la densité. Ce sont les valeurs limites données par les formules (6) et (7), où l'on fait $\eta = 0$ et $F_1 = D_1$, c'est-à-dire les valeurs 305,31; 230,70 et 270,34. *Voir* ces courbes dans la thèse citée, n° 178.

Les points où les trois courbes, correspondant à chacune des valeurs de n, se rencontrent indiquent la valeur de l'aplatissement qui s'accorde avec l'attraction et la précession. Ces points forment une *ligne droite* donnant la valeur unique 1:297,2. Les valeurs exactes ne diffèrent que de 1 ou 2 centièmes de 217,19. Elles ont été données au Chapitre XI, n° 139. Pour ρ_1 compris entre 2 et 3 la valeur de l'aplatissement est limitée par les valeurs

$$(15) \qquad 297,17 < \frac{1}{e} < 297,19, \qquad \frac{1}{e} = 297,18 \pm 0,01.$$

Par interpolation, pour $n = 0$, on aurait les valeurs extrêmes

$$1:e = 297,20 \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = 3,17.$$

Ces valeurs des aplatissements ont été calculées d'une façon plus précise encore, avec 6 chiffres exacts, pour les valeurs de la densité superficielle comprises entre 2 et 3, cela en vue des calculs de

seconde approximation en tenant compte de e^2. On obtient, pour la loi de Roche, le tableau suivant :

ρ_1........	2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
$1:e_\varphi$......	302,829	298,346	293,911	289,524	285,186	280,897
$1:e_J$......	295,795	296,902	297,930	298,883	299,764	300,574
$1:e_{\varphi J}$.....	299,444	297,644	295,865	294,108	292,371	290,655

Les valeurs de η_1, dans le cas de Roche $n=2$, sont de plus résumées par la formule suivante, qui les donne à 0,002 près au moyen de ζ, ou ρ_1,

$$(16)\qquad \eta_1 = 0,86842\,\frac{\zeta}{3} + 0,16738\,\frac{\zeta^2}{3^2} + 0,0092\,\frac{\zeta}{3}\left(1-\frac{\zeta}{3}\right)\left(2\,\frac{\zeta}{3}-1\right).$$

Les deux premiers termes représentent une parabole, passant par les points $\frac{1}{3}\zeta = 0, \frac{1}{2}, 1$. Le troisième est un terme de correction, nul pour ces trois points. Cette formule contient donc et résume tous les calculs numériques, pour $n=2$, dans le cas de Clairaut. Des formules analogues donnent η_1 pour les autres valeurs de n.

Dans le cas de la loi de Roche, les aplatissements correspondants à l'attraction, première formule (6), sont donnés en fonction de la densité superficielle par la formule

$$(17)\qquad 1:e_\varphi = 350,323 - 24,957\,\rho_1 + 0,605\,\rho_1^2.$$

Les aplatissements correspondant à la précession, seconde formule (6), sont donnés par

$$(18)\qquad 1:e_J = 280,651 + 9,434\,\rho_1 - 0,931\,\rho_1^2.$$

L'aplatissement qui réalise l'accord a pour valeur

$$(19)\qquad 1:e_1 = 297,177, \qquad 1:e_0 = 359,60, \qquad \rho_1 = 2,252.$$

L'aplatissement central e_0 ne diffère que de $\frac{1}{5}$ de l'aplatissement superficiel e_1.

Tous ces aplatissements, calculés par les formules de première approximation, doivent être diminués de 0,72 pour obtenir la vraie valeur 296,46, n° 153.

Remarque. — *La loi des densités* qui permet de donner le

même aplatissement, concordant avec l'attraction et la précession, en prenant 5,52 pour la densité moyenne, n° 165 (au lieu de 5,56 ancienne valeur prise pour base des calculs), devra s'écrire

$$(20)\qquad \rho = 10{,}41 - 8{,}18\,r^2 \qquad \rho_1 = 2{,}23.$$

L'ancienne formule, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* avant 1919, conduisait aux valeurs 291,14 pour l'inverse de l'aplatissement donné par l'attraction et 298,53 pour celui qui correspondait à la précession.

La valeur de la densité superficielle 2,23 est comprise entre celle des roches superficielles 2,5 et celle donnée par l'expérience d'Airy (n° 160), 2,10 à 1,94. Peut-être ces derniers nombres doivent-ils être corrigés par la théorie de la compensation, ou bien la valeur que l'on déduit des expériences par la formule de Saigey est-elle une densité moyenne de la surface, océans et roches compris?

Il semble que la véritable densité superficielle de la Terre, qui doit intervenir dans une formule, ne doit pas être celle de l'écorce, trop irrégulière, mais celle de la couche hydrostatique, immédiatement au-dessous, au niveau de la surface de compensation. Il faudrait alors prendre pour densité superficielle celle des roches primaires, granitiques et basaltiques, de 2,7 à 3. En faisant $n = 1$ dans la formule de Lipschitz, on obtient une variation *linéaire* de la densité, qui donne pour l'accord

$$\rho = 14{,}06 - 11{,}34\,r, \qquad \rho_1 = 2{,}73, \qquad 1:e = 297{,}17.$$

La formule de Lévy (n° 176) donnera des résultats encore meilleurs. Connaissant la loi des densités (20) qui concorde avec l'aplatissement, on peut en déduire facilement la variation de la pesanteur en fonction de la profondeur. Elle croît jusqu'à un faible maximum, qui dépasse de 0,04 sa valeur à la surface, pour décroître jusqu'au centre, où elle devient nulle, n° 160.

173. Cas limite des surfaces de niveau semblables. — On a vu ci-dessus, formule (19), que l'aplatissement central, et par conséquent tous les aplatissements des couches internes diffèrent peu de l'aplatissement superficiel. On est conduit à étudier d'abord le cas simple où les aplatissements internes seraient tous

égaux à l'aplatissement superficiel, et à rattacher à ce cas celui de vitesses quelconques et aplatissements quelconques.

La formule générale de Clairaut, à la surface (18) (n° **124**), donne immédiatement, dans le cas de e constant et de la formule de Lipschitz,

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3}{5\,D_1}\int_0^1 \rho\, da^5\right) = \frac{4}{5\varphi}\left(1 + \frac{\zeta}{n+5}\right). \tag{21}$$

La même formule générale prise sous la forme (2) (n° **119**), en ω^2, donne pour la loi des vitesses de rotation

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 - \gamma r^n), \qquad \gamma = \frac{5}{n+5}\,\frac{\zeta}{n+\zeta}. \tag{22}$$

Il faut prendre alors, pour équation de la précession, celle qui sera déterminée dans le chapitre suivant, formule (13), pour le cas des vitesses variables. On a

$$J\int_0^1 \rho\, dr^5 = e_1\omega_1\int_0^1 \frac{\rho\, dr^5}{\omega} = e\,D_1,\ m', \qquad \frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\,\frac{D_1}{F_1}\,m', \tag{23}$$

$$m' = \frac{n+\zeta}{n}\sqrt{1-\gamma}\left(h_1 - \frac{5\alpha}{n+5}\,h_2\right), \tag{24}$$

où h_1 et h_2 sont encore des séries hypergéométriques

$$h_1 = h(a, b, c, \gamma), \qquad h_2 = h(a, b+1, c+1, \gamma), \tag{25}$$

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{5}{n}, \qquad c = \frac{5}{n} + 1.$$

Les valeurs de $1 : e_\varphi$ sont linéaires en ζ ou en ρ_1 et facilement calculables. Celles de $1 : e_J$ pour $n = 2$ sont

ρ_1....	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$1 : e_J$...	265,81	272,92	279,58	286,34	293,27	300,75	305,31

Les valeurs d'accord de $1 : e$ pour les valeurs de ρ_1, comprises entre 2 et 3, seraient elles-mêmes comprises entre 282 et 285.

174. Hypothèse générale avec vitesses variables à l'intérieur. — Les deux hypothèses précédentes faisaient ω constant, ou e constant, à l'intérieur. On relie le cas général à ces deux hypothèses en écrivant la loi générale des aplatissements, qui doit remplacer

la formule (8) ci-dessus

(26) $$e = e_0(1 + \varepsilon\beta_1 r^n + \varepsilon\beta_2 r^{2n} + \ldots), \qquad e_1 = e_0(1 + \varepsilon\beta).$$

Tous les coefficients de la formule, utilisée dans l'hypothèse de Clairaut, sont multipliés par ε.

Si l'on fait $\varepsilon = 0$, on obtient le cas des surfaces semblables, si l'on fait $\varepsilon = 1$, on obtient celui de la vitesse constante, hypothèse de Clairaut. Pour ε compris entre 0 et 1 la vitesse de rotation croîtra de la surface au centre, mais moins vite que pour les surfaces semblables. On pourra obtenir des aplatissements dont l'inverse sera compris entre 280 et 297. Pour $\varepsilon > 1$ les aplatissements décroîtront de la surface au centre plus vite que dans l'hypothèse de Clairaut. L'inverse de l'aplatissement sera plus grand que 297. La vitesse de rotation des couches décroîtra de la surface au centre.

En portant cette expression de e dans l'intégrale de la formule de Clairaut (11), on obtient pour les valeurs de m et η_1 les mêmes expressions que (12) et (14) ci-dessus, n° 171, mais où tous les β sont multipliés par ε.

La loi des vitesses s'obtient de la même façon que pour la formule (22) ci-dessus en portant e dans la formule en ω^2. On annule tous les coefficients des puissances de r supérieures à r^n, ce qui détermine d'ailleurs les mêmes valeurs des β que dans l'hypothèse de Clairaut, et qui donne, pour les vitesses de rotation, une formule très simple analogue à celle de Lipschitz,

(27) $$\omega^2 = \frac{8}{3}\pi f e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r^n) = \omega_0^2(1 - \gamma r^n),$$

où l'on a d'ailleurs

(28) $$-k_1 = (1 - \varepsilon)\beta_1 = \frac{1-\varepsilon}{n+5}\,\frac{2\zeta}{n+\zeta},$$

$$k_0 = \frac{2}{5}(1-\varepsilon) + \varepsilon k_0', \qquad k_0' = \frac{3\omega^2}{8\pi f e_0 \rho_0} = \frac{\varphi}{2e_1}\,\frac{n(1+\beta)}{n+\zeta},$$

k_0' étant la valeur de k_0 en vitesse constante, pour $\varepsilon = 1$.

Ces valeurs déterminent γ et la loi des vitesses de rotation, en fonction du seul paramètre ε, et des valeurs de β dans l'hypothèse de Clairaut, ce paramètre ε étant le même que celui qui détermine la nouvelle loi des aplatissements. On obtient ainsi l'aplatissement, qui cadre avec l'attraction et la loi des vitesses de rotation.

Pour obtenir l'aplatissement qui cadre avec la précession il faut porter ces expressions (26) et (27) de e et de ω dans l'équation générale de la précession, étudiée dans le chapitre suivant formule (13). On obtient une formule analogue aux formules (23) et (24) ci-dessus, où l'on retrouve les séries hypergéométriques h_1, h_2, suivies d'une série d'autres séries hypergéométriques du même genre, heureusement aussi rapidement convergentes que (11) et (12) du n° 171 ci-dessus en β'.

Les valeurs des aplatissements e_φ et e_1 ont été calculées pour les valeurs 1, 2, 3 de n, pour les valeurs de 2 en 2 dixièmes de ε de 0 à 1, 2, enfin, dans ces 42 cas différents, pour les valeurs entières de ρ_1, de 0 à D_1 et de 2 en 2 dixièmes de 2 à 3, soit en tout 420 déterminations différentes de l'aplatissement.

Nous donnons pour la loi de Roche, c'est-à-dire $n=2$, les valeurs d'accord obtenues, les valeurs des différents éléments qui permettent de réaliser le même aplatissement répondant à la fois aux conditions de l'attraction et de la précession avec différentes valeurs de ε. La première ligne donne les valeurs de ε, la seconde l'aplatissement résultant e_1, la troisième la densité superficielle correspondante ρ_1, la quatrième la valeur de γ qui détermine la loi des rotations, pour chaque valeur de ε, enfin la dernière ligne donne la différence du temps de rotation au centre et à la surface δT :

ε.............	0,0.	0,6.	0,8.	1.0.	1,2.
$1:e_1$.........	283,54	291,87	294,55	297,18	299,76
ρ_1.............	2,589	2,378	2,314	2,252	2,194
γ.............	0,318	0,147	0,077	0,00	−0,086
δT_0...........	$-4^h 10^m$	$-1^h 50^m$	$-\ 57^m$	0,00	$+1^h\ 1^m$

Les densités superficielles ont été calculées pour $D_1=5,56$. Il faut les diminuer de 0, 01 pour les faire accorder avec la valeur $D_1=5,52$ qui découle des déterminations les plus récentes.

On voit qu'on pourrait faire varier l'aplatissement *théorique*, s'accordant à la fois avec la précession et l'attraction, de 285 à 300 et plus, en faisant varier la vitesse de rotation des couches intérieures de la Terre.

La densité superficielle théorique varie peu dans ces différents cas, de 2,19 à 2,60, et reste dans des limites acceptables.

La formule suivante permet de déterminer la valeur de l'aplatis-

sement, qui s'accorde avec l'attraction et la précession, suivant les différentes valeurs de n et de ε

$$\begin{aligned}1 : e = 297,18 &- (0,13\,n^2 - 2,36\,n + 17,85)(1-\varepsilon) \\ &+ (0,85\,n^2 - 4,54\,n + 6,30)(1-\varepsilon)\varepsilon.\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon = 1$ on obtient la formule qui donne l'aplatissement avec la loi de Lipschitz, dans le cas de la Terre tournant en bloc.

175. **Hypothèse d'une Terre solide.** — Dans ce cas les aplatissements pourraient être quelconques, car la Terre aurait pu se solidifier en conservant la même vitesse de rotation, différente de la rotation actuelle, ou bien se solidifier avec des vitesses différentes sur les différentes couches. En tout cas, actuellement la vitesse serait partout la même et l'aplatissement serait encore donné par les formules (6) et (7) correspondant à l'hypothèse de Clairaut. De plus la formule (7) qui donne $e_{\varphi J}$ ne dépend que de F_1 et D_1, c'est-à-dire de la loi des densités et non de celle des aplatissements et $e_{\varphi J}$ conserve les mêmes valeurs déjà calculées au n° 171. Au contraire e_φ et e_J, formule (6), dépendront de η_1, c'est-à-dire de la loi des aplatissements.

On peut d'abord rattacher la loi des aplatissements à celle de l'hypothèse de Clairaut, comme dans le cas général précédent, formule (26), en multipliant les coefficients des termes de e par ε. On pourra déduire de e ou de ε, comme ci-dessus (27), (28), la loi des vitesses de rotation, qui correspondrait à cette loi des aplatissements, c'est-à-dire qui la redonnerait dans le cas de la fluidité.

On en déduit le tableau suivant ([1]) pour les principales valeurs de ε, résultat de 800 déterminations de e,

ε........	∞.	1:0,4.	1:0,8	1,0.	0,6.	0.	—0,35.
$1 : e_1$.....	284,41	293,22	296,21	297,17	299,24	305,31	318,73
$1 : e_0$.....	∞	430,75	372,80	360,48	339,96	305,31	281,75
$\omega_0 : \omega_1$....	0,00	0,76	0,95	1,00	1,09	1,27	1,46
ρ_1.........	3,76	2,70	2,36	2,25	2,02	1,36	0,00

On voit que $1 : e_1$ pourrait varier de 284 à 319 quand ρ_1 varie

([1]) A. Véronnet, *Thèse*, Chap. VII.

de 3,76 à o avec $n = 2$. On aurait encore

$$290,65 < \frac{1}{e} < 299,44 \qquad \text{pour} \qquad 2 < \rho_1 < 3.$$

Pour différentes valeurs de n et les valeurs de ρ_1 comprises entre 2 et 3 les valeurs limites des aplatissements concordants seraient donnés par le tableau suivant :

n..............	0.	1 : 2.	1.	2.	3.	4.
$\frac{1}{e_1} <$...........	312,92	308,50	304,91	299,44	295,47	292,45
$\frac{1}{e_1} >$...........	299,74	296,74	294,34	290,65	287,95	285,89

On aurait enfin

$$220,07 < \frac{1}{e} < 312,92 \qquad \text{pour} \qquad \rho_1 = 2.$$

$$284,25 < \frac{1}{e} < 299,74 \qquad \text{pour} \qquad \rho_1 = 3.$$

On peut également se donner une loi des aplatissements analogue à la loi des densités de Lipschitz ou de Roche et l'introduire comme celle-ci dans la formule de Clairaut. On obtient des résultats du même ordre.

176. Lois des densités de M. Lévy. — Cette loi, plus générale que la loi de Lipschitz, s'écrit

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)^{n'}. \tag{29}$$

Elle contient un paramètre n' en plus. La courbe admet un point d'inflexion, où la variation de la densité est maximum, pour $\rho'' = 0$. On pourra donc réaliser ainsi un noyau central, à forte densité, et une écorce superficielle, à densité plus faible. Elle permet de réaliser une condensation plus considérable et un aplatissement, correspondant à l'attraction, plus petit qu'avec la loi de Lipschitz.

Lévy avait étudié cette loi pour essayer d'accorder mieux l'aplatissement donné par l'attraction avec celui déterminé par la pression. M. A. Véronnet l'a appliquée pour déterminer l'aplatissement de Jupiter et de Saturne.

Pour $n' = 2$ on a d'abord

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha r^n)^2. \tag{30}$$

En procédant comme pour la loi de Lipschitz on obtient successivement, pour la détermination par récurrence des β de la loi des aplatissements,

$$\beta_i = \frac{6\alpha}{n+3} \beta_{i-1} \left(1 - \frac{1}{i} \frac{n+3}{in+5}\right) - \frac{3\alpha^2}{2n+3} \beta_{i-2} \left(1 - \frac{2}{i} \frac{2n+3}{in+5}\right)$$

$$m = (1-\alpha)^2 + \frac{2\alpha n}{1+\beta} \left[\frac{1 + (n+5)\beta'}{n+5} - \alpha \frac{1 + (2n+5)\beta''}{2n+5} \right],$$

où β' a la même forme que dans (12) et β'' et m étant définis par

$$\beta'' = \frac{\beta_1}{3n+5} + \frac{\beta_2}{4n+5} + \ldots, \qquad \int_0^1 \rho \, d e r^5 = e_1 \rho_0 m.$$

Les aplatissements seront ensuite donnés par les trois formules (6) et (7) où l'on aura porté la valeur de m.

Les calculs numériques donnent les résultats suivants pour $n = 2$,

α	1.	0,9.	0,8.	....	0,54.	0,52.	0,50.
$1 : e_\varphi$	428,88	398,68	366,32	...	302,04	297,97	294,06
$1 : e_J$	234,83	255,49	274,33	...	295,99	297,00	297,91
$1 : e_{\varphi J}$	353,89	339,86	326,38	...	299,12	297,50	295,93

Les valeurs d'accord ont lieu environ pour $\alpha = 0,516$ et donnent

$$1 : e_1 = 297,18, \qquad 1 : e_0 = 372,55.$$

Avec la loi des densités correspondante

$$\rho = 11,23 (1 - 0,52 r^2)^2, \qquad \rho_1 = 2,63. \tag{31}$$

On retrouve toujours le même aplatissement de première approximation. La densité superficielle est plus forte qu'avec la loi de Roche et conviendrait mieux pour la vraie densité superficielle, prise au-dessous des scories de l'écorce solide, n° 168.

Pour $n' = 3$ on obtiendrait des expressions analogues pour les β et pour m. On voit même immédiatement l'expression générale, pour n' quelconque. Les calculs numériques donnent le tableau suivant, pour $n' = 3$,

α..............	1.	0,9.	0,8.	....	0,40.	0,38.	0,36.
$1:e_\varphi$............	477,35	459,60	422,75	...	301,72	296,92	292,16
$1:e_J$............	192,88	204,68	240,89	...	296,26	297,20	298,30
$1-e_{\varphi J}$...........	380,60	366,80	351,76	...	299,09	297,05	295,16

Les valeurs d'accord ont lieu pour

$$1:e = 297,15, \qquad \rho_1 = 2,73,$$

(32) $$\rho = 11,53(1-0,387^2)^3.$$

La densité superficielle est plus forte encore que dans le cas précédent.

Nous avons vu au n° 170 que la loi de Lipschitz ne pouvait donner de fortes densités superficielles que pour $n=1$ avec $\rho_1 = 2,73$, ou $n > 1$. La courbe des densités serait une ligne droite, on tournerait sa concavité vers le haut.

Avec la formule de Lévy, la courbe des densités tournerait bien sa concavité vers le bas, sur la plus grande partie du rayon, comme avec la loi de Roche, ce qui paraît plus normale. Mais de plus, elle présenterait un point d'inflexion assez marqué. A une profondeur $r = 0,80$ du rayon, pour $n' = 2$, (première formule), la vitesse d'accroissement de la densité serait maximum et égale à 1,4 de sa valeur à la surface. La densité y serait déjà égale aux deux tiers de sa valeur au centre, puis aux trois quarts à 0,1 du rayon plus bas. A la moitié du rayon, la densité ne différerait déjà que de un huitième de la densité centrale.

Avec la loi des densités de Lévy, nous aurions donc comme un noyau central, où la densité varierait assez peu, sur la moitié du rayon de la Terre. La densité superficielle serait plus grande que celle donnée par la loi de Roche, mais elle varierait d'abord moins vite, puis avec une accélération maximum, de sorte qu'il y aurait une séparation asssez nette entre le noyau central et la partie superficielle qui l'enveloppe.

Nous verrons au Chapitre XVI que cette répartition des densités, avec noyau central est absolument exigée pour expliquer l'aplatissement de Jupiter et de Saturne, et nous verrons que cette inflexion des densités s'explique très simplement par la loi de l'accroissement des pressions dans une masse gazeuze, à laquelle on applique une loi des gaz réels, de Van der Vaals ou de Clausius.

177. Calcul des éléments de seconde approximation. — On a vu au n° 155 que la valeur γ de la dépression de l'ellipsoïde était définie au moyen de l'expression A du second ordre par les formules (47) et (47)'. En y introduisant la valeur de e définie par (8), on obtient

$$A = 4\alpha n e_0^2 \rho_0 r^n \left[\frac{1}{n+3}\frac{e^2}{e_0^2} - 2\frac{e}{e_0}\left(\frac{1}{n+5} + \frac{\beta_1 r^n}{2n+5} + \frac{\beta_2 r^{2n}}{3n+5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{n+7} + \frac{2\beta_1 r^n}{2n+7} + \frac{2\beta_2 + \beta_1}{3n+7} r^{2n} + \ldots\right)\right].$$

A la surface, on fait $r = 1$. On représente par β' et β'' la valeur des parenthèses, on aura

$$A_1 = 4\frac{\alpha n}{1-\alpha}\rho_1 e_1^2 \left[\frac{1}{n+3} - \frac{2\beta'}{1+\beta} + \frac{\beta''}{(1+\beta)^2}\right], \qquad e_1 = e_0(1+\beta).$$

Les valeurs de β et β' ont déjà été calculées n° 171. On déduit β'' des valeurs β_1, β_2, ... On calcule ensuite γ de la même façon. Pour différentes valeurs de ρ_1, avec la loi de Roche $n = 2$, on obtient le tableau suivant des valeurs de $\frac{A}{4De^2}$, et les valeurs extrêmes de γ et de δr à 45°, où $\delta r = \frac{1}{4} a\gamma\lambda^4 = \gamma r e^2$

ρ_1.	$\frac{A}{4De_1}$.	$<\gamma<$		$<\delta r$	
2,0	0,099	0,0423	0,0559	3,06	4,04
2,2	93	400	522	2,89	3,77
2,4	87	381	489	2,75	3,53
2,6	81	358	453	2,59	3,28
2,8	74	334	417	2,41	3,02
3,0	68	309	380	2,23	2,75

On a trouvé n° 172 que la valeur d'accord pour l'aplatissement donnait $\rho_1 = 2,25$. On déduit du tableau pour cette valeur

$$2,86 < \delta r < 3,71, \qquad \delta r = 3^{m},28 \pm 0,42.$$

La dépression maximum de l'ellipsoïde à 45° serait de 3 à 4^{m}, valeur probable 3^{m},28. Darwin avait trouvé 3^{m},26. C'est tout à fait négligeable et bien au-dessous des limites d'observation actuellement.

CHAPITRE XV.

HYPOTHÈSES AUTRES QUE CELLE DE CLAIRAUT. VITESSES INTERNES ET DÉPLACEMENTS A LA SURFACE.

178. **Objet du Chapitre.** — L'hypothèse de Clairaut qui a servi de base à la plupart des travaux mathématiques sur la constitution et la forme de la Terre se ramenait elle-même à deux autres. Elle considérait l'aplatissement comme assez faible pour négliger son carré. Nous avons étudié au Chapitre XIII les corrections à introduire dans les formules et dans la figure de la Terre en tenant compte de ce carré.

Cette hypothèse supposait en plus que la Terre était fluide, ou du moins en équilibre hydrostatique, et qu'elle tournait d'un seul bloc comme un corps solide. Nous étudierons dans ce chapitre les modifications, qui seraient introduites en faisant d'autres hypothèses, en considérant la Terre comme solide, en admettant que la vitesse de rotation des différentes couches intérieures n'est pas la même que la vitesse à la surface. Nous étudierons en particulier la différence de l'action de précession du Soleil et de la Lune, sur les différents parallèles de l'écorce, comme aussi la différence d'action sur l'écorce et sur le noyau, et nous en déduirons une théorie explicative des tremblements de terre et du déplacement des pôles à la surface.

179. **Hypothèse d'une Terre solide.** — La Terre, supposée solide, aurait pu se solidifier en bloc, avec la même vitesse de rotation sur chaque couche, ou bien progressivement, avec des vitesses différentes pour chacune des couches au moment de la solidification. Dans chaque cas l'aplatissement superficiel aurait été différent.

Il faut remarquer que les trois équations de Clairaut (17), (18),

(19), Chapitre X, n° **124**, sont toujours valables, car elles n'introduisent aucune hypothèse sur les vitesses de rotation. L'équation différentielle de Clairaut, (11), Chapitre X, ou celle de Clairaut-Radau, formule (4), Chapitre XI, ont été établies au contraire en supposant la même vitesse partout. Il faudra les modifier, les compléter, dans l'hypothèse de vitesses variables.

Dans le premier cas, où l'on suppose la même vitesse de rotation pour toutes les couches solidifiées, il n'y a aucune modification à introduire dans les formules (16), (17), (18) du Chapitre XI, n° **135**, qui conduisent à l'équation de condition (19),

$$(1) \qquad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2}, \qquad \eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2,$$

e est l'aplatissement, J le rapport des moments d'inertie, φ le rapport de la force centrifuge à l'attraction. Comme on a vu que les limites données par la formule (1) sont très resserrées et la valeur moyenne de K très voisine de 1, il suffira de faire $K = 1$. Nous avons vu également que les limites de (1) sont peu modifiées en seconde approximation. Cette formule nous donnera à quelques dixièmes près, dans tous les cas, l'aplatissement exact, conciliable avec l'attraction et la précession.

Dans le cas où la Terre se serait solidifiée, avec une vitesse différente de la vitesse actuelle, la valeur de φ serait modifiée

$$\varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f D}.$$

Le tableau suivant donne les valeurs de φ et de ω, vitesse de rotation, qu'auraient donné les aplatissements indiqués par la première ligne.

$1:e$..........	292	293	294	295	296	297	298
$1:\varphi$..........	266	270	274	278	283	288	293
$\omega:\omega_1$.........	1,041	1,033	1,026	1,019	1,011	1,00	0,992

La dernière ligne indique le rapport entre la vitesse de solidification et la vitesse de rotation actuelle ω_1. Pour réaliser en vitesse uniforme un aplatissement superficiel de 1:292 première colonne, satisfaisant à la précession, il aurait fallu et suffit que la vitesse de rotation au moment de la solidification fut 0,041 plus grande que la vitesse actuelle.

Pour que l'aplatissement de la Terre soit celui de Faye et de Clarke, il faudrait donc que la Terre, supposée solide, se soit solidifiée alors que le jour était de $23^h,3^m$, c'est-à-dire environ 57^m plus court qu'actuellement. L'année aurait eu 380 jours. On expliquerait le ralentissement de la rotation par le freinage dû à l'action des marées.

Pour réaliser un aplatissement de 1 : 298, dernière colonne, il aurait fallu que la vitesse fut 0,008 plus petite qu'actuellement. Le jour aurait été plus long de 11 minutes environ. L'accélération de la rotation depuis l'époque de la solidification s'expliquerait par la contraction due au refroidissement.

180. Terre solide, solidifiée progressivement avec des vitesses différentes. — Dans le cas où l'on suppose les *vitesses variables*, il faut compléter l'équation différentielle. On reprend l'équation (9), Chapitre X. Alors on n'a plus $d\omega^2 = 0$. Il y a en plus dans (10) un terme en $r^6(\omega^2)'$ et dans (11) un terme en $(r^6\,\omega\omega')$. L'équation de Clairaut-Radau, (4), Chapitre XI, aura, comme second membre, une expression en ω, ω' et ω''

$$(2) \qquad \sigma = \frac{3}{8\pi f}\cdot\frac{r^2(\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{e\mathrm{D}}.$$

Ce terme de correction s'introduit dans les formules (17), (18), (19) du Chapitre XI en remplaçant $r\eta'$ de (16) par sa valeur déduite de l'équation différentielle de Clairaut-Radau. L'expression K dans la formule (1) ci-dessus est remplacée par l'expression corrigée

$$(3) \qquad \mathrm{K}' = \mathrm{K} + \frac{1}{10}\,\frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}},$$

où (σ) et (η) représentent les valeurs moyennes de σ et de η à l'intérieur et définies comme K par la formule (18) du Chapitre XI.

Pour réaliser un aplatissement égal à 1 : 292 (Faye) la valeur du terme de correction serait 0,024. Pour 1 : 298 elle serait — 0,003.

La valeur du terme de correction est positive si l'inverse de l'aplatissement superficiel est inférieur à 297. Il s'ensuit alors que les vitesses intérieures de solidification auraient dû être croissantes du centre à la surface.

Pour expliquer l'état actuel il faudrait admettre que la solidifi-

cation a commencé par le centre alors que la vitesse était plus faible que la vitesse actuelle, puis cette vitesse serait allée en augmentant, par suite de la contraction, jusqu'à la vitesse actuelle (¹).

Ou bien la solidification aurait commencé par la surface, avec la vitesse actuelle, pour s'étendre progressivement jusqu'au centre. Mais alors la vitesse des couches internes aurait dû, dès le début, aller en décroissant de la surface au centre, car autrement on ne voit aucune cause capable de diminuer cette vitesse alors que la vitesse superficielle serait restée la même, par hypothèse.

181. Détermination du coefficient de précession et du rapport des moments d'inertie. — On a vu, dans le Chapitre XI, nos 141, 142, comment Tisserand et Callandreau avaient reconnu qu'il était difficile de concilier la valeur de l'aplatissement, déterminé par Clarke et par Faye, avec le coefficient de la précession. On a vu comment Radau et Poincaré avaient démontré que cette conciliation était impossible, au moins en première approximation, n° 136. Nous venons de voir, dans le Chapitre XII, que cette conciliation est impossible, quelle que soit l'approximation réalisée, et que l'aplatissement ne pouvait être inférieur à 1 : 296.

Mais la valeur du coefficient de précession a toujours été déterminée en supposant que la Terre tournait tout d'un bloc. Or on comprend tout de suite que l'action de la Lune sur le renflement équatorial ne sera pas la même si les couches sous-jacentes à l'écorce ne tournent pas avec la même vitesse que la surface. M. A. Véronnet a étudié dans sa thèse ce nouveau problème, et les modifications qui pourraient en résulter pour l'aplatissement théorique, déterminé mathématiquement, en accord avec les données astronomiques de la gravitation et de la précession.

Laplace avait déjà démontré que les phénomènes de précession et de nutation n'étaient modifiés en rien par la fluidité de la mer. Hopkins, Hennessy, Thomson, G. H. Darwin, S. Oppenheim, enfin

(¹) Roche, avec l'hypothèse d'un noyau central et d'une écorce, avait trouvé que l'accélération de la vitesse aurait été de 29m pour que l'aplatissement qui, dans le cas de l'équilibre hydrostatique, serait de 1 : 294,3, fut réellement 1 : 292, nombre trouvé alors par Faye (*Académie de Montpellier*, 1881).

et surtout H. Poincaré (¹) ont démontré, d'une façon complète, que le phénomène de précession du moins n'était aucunement modifié par l'état physique de la Terre, qu'elle soit complètement solide ou liquide, ou qu'elle soit composée d'un noyau liquide entouré d'une écorce solide, rigide ou élastique.

La valeur du rapport J des moments d'inertie de la Terre, qui est déduite du phénomène de la précession, est donc indépendante de toute hypothèse physique. Mais elle dépend étroitement, par les formules de la précession, de la vitesse de rotation de la Terre et par conséquent de la vitesse de chacune des couches élémentaires. Il suffit de reprendre la théorie de la précession pour étudier la correction à introduire dans la valeur de J, dans le cas de vitesses différentes sur les différentes couches.

Le phénomène de la précession est déterminé et mesuré par les termes séculaires du développement de la fonction perturbatrice U dans le mouvement de la Terre

$$U = f \int \int \frac{dm\, dm_1}{r}.$$

L'intégrale s'étend à tous les points dm de la Terre et à tous les points dm_1 des astres perturbateurs, r étant la distance des centres de gravité respectifs. On obtiendra les équations du mouvement en portant les expressions $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial U}{\partial \psi}$, dans les équations de Lagrange, relatives à la fonction U. Ici θ, φ, ψ sont les variables de signification connue, θ l'angle des deux plans (équateur et écliptique), φ et ψ les arcs comptés respectivement sur l'équateur et sur l'écliptique, à partir du point γ.

En développant la fonction U on obtient (²)

$$(4) \qquad U = f\left(\frac{m}{r} + \frac{A + B + C - 3I}{2r^3}\right) \int dm_1 = D - \frac{3}{2} \Sigma f \frac{M}{r^3} I.$$

D est indépendant de θ, φ, ψ, et contient les termes en m et en A + B + C. De plus, M est la masse de l'astre perturbateur et I le moment d'inertie de l'astre troublé, autour du rayon vec-

(¹) LAPLACE, *Mécanique céleste*, Liv. V, nᵒˢ 10-12. H. POINCARÉ, *Bull. astr.*, sept. 1910.

(²) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 1, p. 61.

teur joignant les deux astres; la somme Σ est étendue à l'ensemble des astres perturbateurs.

La Terre étant supposée de révolution, on a $C = B$ et

$$(5) \qquad U = D' - \Sigma \frac{3}{2} f(A - B) \frac{M}{r^3} \frac{x^2}{r^2}, \qquad I = A \frac{x^2}{r^2} + B \frac{y^2 + z^2}{r^2},$$

D' étant une nouvelle constante, qui contient un terme en B en plus, par la transformation de I.

Les valeurs de $x^2 : r^2$ correspondant à la position du Soleil et de la Lune peuvent s'écrire

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = \sin^2 l \sin^2 L = \dfrac{1}{2} \sin^2 \theta [1 - \cos 2(mt + \psi)], \\ \dfrac{x'^2}{r'^2} = \sin^2 \theta \sin^2 L' + i \sin^3 \theta \cos \theta \cos N, \end{cases}$$

L, L', N sont les longitudes du Soleil, de la Lune et du nœud ascendant de la Lune.

La seconde équation, avec les éléments marqués d'indice, est relative à la Lune, en n'y conservant que les éléments indépendants de i^2.

On voit sur ces équations que U est indépendant de φ. L'équation de Lagrange relative à φ donne donc, pour $C = B$, ω constant. La précession n'altère pas la vitesse de rotation, *premier théorème* [1].

En transformant les équations de Lagrange, relatives à θ et ψ, en un système canonique, on en déduit

$$(7) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{A \omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{1}{A \omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Si l'on ne considère dans les formules (6) que les termes, où le temps n'est pas périodique, les seuls dont dépend la précession, on a

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)_p = 0; \qquad \text{d'où} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_p = \theta_0.$$

Le phénomène de la précession ne modifie pas l'obliquité moyenne θ_0 de l'équateur sur l'écliptique, *second théorème*.

---

(1) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 2, p. 392 et 409.

On obtient enfin

$$(8') \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{3}{2}f\left(\frac{M}{r^3}+\frac{M'}{r'^3}\right)(A-B)\sin\theta\cos\theta$$

et

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p = \frac{3}{2}f\left(\frac{M}{r^3}+\frac{M'}{r'^3}\right)\frac{A-B}{A}\,\frac{\cos\theta}{\omega} = h\,\frac{J}{\omega}\cos\theta.$$

Cette expression définit le déplacement ψ du point γ en fonction du temps, c'est-à-dire la précession. On voit que cette valeur dépend du rapport des moments d'inertie J, de la vitesse de rotation ω et de l'inclinaison θ de l'équateur sur l'écliptique.

182. Modification du coefficient de précession dans le cas de vitesses internes variables. Résultats. — La même formule (9) est applicable à une couche ellipsoïdale quelconque. D'autre part $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est la vitesse de rotation autour de l'axe de l'écliptique.

En désignant par dA et dB les deux moments principaux d'inertie de cette couche élémentaire, on peut écrire, pour la quantité de mouvement correspondant à cette rotation,

$$(10) \qquad dA\,\frac{d\psi}{\partial t} = h(dA-dB)\frac{\cos\theta}{\omega}.$$

En première approximation, comme $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ et $dA-dB$ sont des quantités très petites du même ordre, on peut prendre l'un des deux moments d'inertie, dA par exemple, pour celui qui correspond à $\frac{d\psi}{dt}$.

On n'aura ensuite qu'à intégrer de o à $r=1$ pour obtenir la quantité de mouvement totale. En tenant compte des expressions des moments d'inertie élémentaires [formules (16) et (16'), Chap. X, n° 123], on a

$$(11) \qquad A\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p = \frac{8\pi}{15}\int_0^1 \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial t}\,da^5 = \frac{8\pi}{15}\,h\int_0^1 \rho\,\frac{\cos\theta}{\omega}\,da^5 e.$$

On a négligé e^2 dans l'expression de $dA-dB$, et e dans celle de dA. On a admis aussi que $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ était constant, c'est-à-dire que toutes les couches conservent le même axe de rotation.

De plus θ est constant, si ω l'est aussi. on aura, en tenant compte de la valeur de J, d'après (17), n° **123**.

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p = \frac{8\pi}{15}\, h\, \frac{\cos\theta}{\omega_1} \int_0^1 \rho\, da^5 e = \frac{8\pi}{15}\, h\, \frac{J}{\omega_1} \cos\theta \int_0^1 \rho\, da^5. \tag{12}$$

La valeur de A est égale à la dernière intégrale multipliée par $8\pi/15$, de sorte que l'on trouve bien (9).

Si ω n'est pas constant, alors en identifiant les seconds membres de (11) et (12), on a

$$\int_0^1 \frac{\rho}{\omega}\, da^5 e = \frac{1}{(\omega)} \int_0^1 \rho\, da^5 e = \frac{J}{\omega_1} \int_0^1 \rho\, da^5. \tag{13}$$

C'est la nouvelle relation donnée par le rapport des moments d'inertie J et qui doit remplacer l'expression (17) du n° **123**.

En représentant par (ω) la valeur moyenne de ω, définie par (13), les trois relations fondamentales (17), (18) et (19) des nos **123**, **124** pourront s'écrire, dans cette nouvelle hypothèse,

$$\frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 = \int_0^1 \rho\, da^5 e = J\,\frac{(\omega)}{\omega_1} \int_0^1 \rho\, da^5. \tag{14}$$

L'équation de condition qui donne l'aplatissement compatible à la fois avec l'attraction et la précession sera modifiée en conséquence. On voit que la valeur de J sera simplement multipliée par $\frac{(\omega)}{\omega_1}$. D'autre part, la fonction K devra être complétée, comme dans le numéro précédent, par l'expression K′ en σ, qui rentre dans le second membre de l'équation de Clairaut-Radau, formules (2) et (3), n° **180**.

On aura la nouvelle expression

$$e + \frac{2}{5} J \frac{(\omega)}{\omega_1} \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K'} = J \frac{(\omega)}{\omega_1} + \frac{\varphi}{2}, \tag{15}$$

qui remplace l'équation de condition (19) du Chapitre XI, n° **135**.

On verrait facilement d'après cette formule que la vitesse des couches internes devrait être plus grande que la vitesse superficielle pour que l'inverse de l'aplatissement puisse être inférieur à 297. On pourrait le faire varier facilement de 273 à 300, comme on l'a vu par les calculs numériques du Chapitre précédent, n° **174**.

Si l'on prend la loi Roche pour loi des intensités et une loi ana-

logue pour celle des vitesses de rotation des différentes couches, on obtiendrait 1 : 292 pour valeur de l'aplatissement avec la loi

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2}{0,857}(1 - 0,143\, r^2), \qquad \omega_0 = 1,08\, \omega_1.$$

La vitesse de rotation au centre tendrait vers une valeur plus grande de 8/100e que la vitesse à la surface, la rotation s'y ferait en $1^h 40^m$ de moins qu'à la surface.

On voit à quel point la limitation théorique de l'aplatissement de la Terre, calculé dans les deux Chapitres précédents, peut être influencé par les hypothèses sur l'état physique interne du globe. C'est pour cela que la mesure exacte de cet aplatissement peut nous renseigner sur cet état interne.

183. Ralentissement de l'écorce dû au frottement des marées. — Depuis longtemps on a signalé le freinage dû aux marées comme une cause de retard dans la rotation de la Terre et d'allongement du jour sidéral [Kant 1754 (1)]. Delaunay signale en 1865 que la réaction de freinage sur la Lune doit produire une accélération séculaire de son moyen mouvement, mise en évidence par l'examen des anciennes éclipses (2). G. H. Darwin élabore toute une théorie cosmogonique sur l'action des marées, la séparation et l'éloignement progressif de la Lune et de la Terre sous cette action.

Laplace avait trouvé que la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre devait produire une accélération séculaire de 20″ du moyen mouvement de la Lune. M. Adams a démontré (1853) que ce nombre devrait être réduit à 6″ seulement, 6″,01 d'après les derniers calculs de Brown (1933). D'autre part Hansen (1857) a trouvé que, pour rendre compte des anciennes éclipses, cette accélération devrait être de 12″ (même 12″,56). S. Newcomb par une nouvelle étude des éclipses montre que ce nombre doit être ramené à 10″,9, ou même à 8″,4, (1878) et (1912) (3).

(1) Note à l'Académie de Berlin.

(2) *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, 11 décembre 1865, 22 et 29 janvier 1866.

(3) Fotheringham (1919), Schoch, de Sitter (1927) trouvent successivement 10,8; 11,10 et 11,2. Ce dernier nombre, le plus probable, ne diffère que de 1″ de celui de Hansen. Voir D. Belorizky, *Accélération séculaire de la Lune* (*Bul. astron.*, Paris, 1934, p. 149) et A. Danjon, *La rotation de la Terre* dans *L'Astronomie*, 1929, p. 13.

Il y aurait donc un écart de 5″,2 entre l'accélération théorique de la Lune et son accélération pratique, déduite des éclipses. On a expliqué définitivement cet écart par l'action des marées.

En évaluant approximativement la hauteur et l'étendue de la marée on introduit facilement un retard de 330″, ou 22 secondes de temps, sur la rotation totale de la Terre en un siècle, ce qui équivaudrait à une augmentation du jour de $0^s,000012$ par an ([1]). Ce retard de 330″ de la Terre correspondrait à une avance apparente de la Lune 27 fois moindre, soit 12″. Mais d'autre part, la réaction du renflement des marées sur la Lune produit une accélération de son mouvemement orbitaire, qui se traduit finalement par un éloignement et une diminution réelle de son moyen mouvement de 6″. L'accélération séculaire définitive de la Lune serait dans ce cas de 6″, et suffisante.

Il est vrai que d'autres causes comme le refroidissement, les chutes de météores (Oppolzer), les oscillations barométriques (Thomson), les séismes peuvent agir dans le même sens ou en sens contraire ([2]).

En admettant que l'accélération totale de la Lune soit due aux marées et que l'augmentation du jour correspondant soit de $0^s,000012$, on calcule quel pourrait être la variation des vitesses internes qui en résulterait et l'aplatissement théorique correspondant. On trouve qu'avec un coefficient de viscosité de 2.10^8, de l'ordre de celui de la poix, pour le frottement entre l'écorce solide et les matières sous-jacentes, on peut abaisser à 1 : 292 la limite de l'aplatissement donnée par Poincaré. Avec un coefficient dix fois plus grand, égal à celui de la poix on obtiendrait 1/296 au lieu de 1/297.

Si l'inverse de l'aplatissement déterminé définitivement par les mesures géodésiques et le pendule était en dessous de 297, il s'ensuivrait probablement qu'il faudrait admettre des vitesses

---

([1]) *Voir* Tisserand, *Méc. cél.*, t. 2, p. 537. Jeffreys a montré plus récemment que cette action de freinage des marées était surtout sensible dans les mers peu profondes.

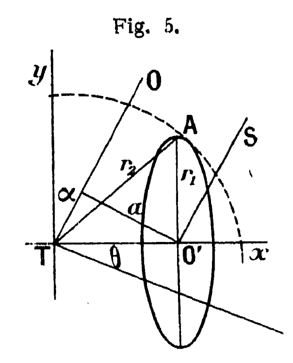
([2]) Elles produisent alors les *fluctuations* du moment de rotation de la Terre et du *jour sidéral*, mises en évidence par les irrégularités dans le mouvement *observé* de la Lune et les occulations d'étoiles. Il y a plus de 50 ans que les théoriciens de la Mécanique céleste signalaient ces phénomènes possibles. Les observateurs ne se sont souciés de les étudier que tout récemment.

variables à l'intérieur de la Terre et les expliquer par le freinage dû aux marées.

Comme au contraire les mesures semblent confirmer la limite théorique 1 : 297 il s'ensuit que la Terre tourne tout d'un bloc et que le retard dû aux marées a une action interne insensible. On doit en conclure que sur aucune surface de niveau, malgré l'élévation de température, la viscosité du milieu ne peut être inférieure à celle de la poix, ou bien que l'action due aux marées est négligeable. Cette action des marées aurait été alors trop lente pour produire les phénomènes indiqués par G. H. Darwin.

184. Calcul de la précession d'un anneau. La précession d'un astre fluide est la même que celle du solide équivalent. — On a vu

Fig. 5.



n° 181, que la déviation due à la précession n'est pas la même sur deux surfaces de niveau, si leur vitesse de rotation est différente. De plus, sur la même surface de niveau, cette déviation n'est pas la même sur tous les parallèles. Il se produit alors comme une torsion et une compression des différents parallèles. Étudions en effet l'action de la précession sur un anneau fluide, ou solide, tournant tout d'une pièce, suivant un parallèle de la Terre.

Soit T le centre de la Terre, O' le centre de l'anneau du rayon $O'A = r_1$. Soit Tx son axe de rotation, Ty la trace du plan de l'équateur, TO la trace du plan de l'écliptique sur xTy (*fig.* 5).

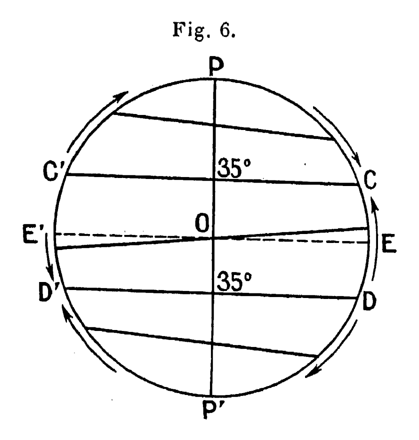
On aura, pour le moment d'inertie I de l'anneau par rapport à l'axe TO, qui joint le centre de la Terre à l'astre perturbateur,

$$I = I_1 + ma^2, \qquad a^2 = O'T^2\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) = (r_2^2 - r_1^2)\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right).$$

abaissement vertical. Ici au contraire il y aura un effet horizontal de tension et de compression, qui suit les mêmes phases.

On peut ajouter d'ailleurs que ces parallèles de 35° sont les

Fig. 6.



cercles où la sphère de même volume coupe l'ellipsoïde, et que ce sont aussi les cercles fixes autour desquels s'articule tout ellipsoïde, qui s'aplatit ou se déforme.

186. **Théorie des tremblemeuts de terre, géosynclinaux, charriages, montagnes et dépressions.** — On comprend que cette force horizontale, les compressions et dilatations alternatives de l'écorce, puissent provoquer des dislocations, des zones de fracture dans l'écorce terrestre. M. A. Véronnet en a déduit une théorie explicative des tremblements de terre [1] et de différents autres phénomènes géologiques.

Cette théorie permet en particulier de localiser plus spécialement la fréquence des tremblements de terre dans la zone de 35°. Or, celle-ci passe par Lisbonne, la Sicile, la Perse, l'Inde, le Japon, le Mexique, qui est bien une région plus particulièrement éprouvée.

D'après la loi de Montessus de Ballore, les régions séismiques coïncident avec les géosynclinaux de l'époque secondaire, zones de dépressions remplies par les sédiments secondaires, puis plissées,

---

[1] *Voir* le très intéressant ouvrage sur *Le tremblement de terre*, par M. Edmond Rothé, directeur de l'Institut de physique du globe de Strasbourg, nouvelle collection scientifique, chez Alcan.

disloquées et relevées à l'époque tertiaire. Ces régions forment le cercle méditerranéen ou alpino-caucasien-himalayen (53 pour 100 des séismes) et le cercle circumpacifique, ou indo-japonais-malais (41 pour 100 des séismes).

Or, on voit que le second cercle, dans sa partie indo-japonaise, prolonge le cercle méditerranéen en complétant le circuit du parallèle de 35°. L'archipel malais resterait en dehors, en s'expliquant comme un prolongement de la formidable dislocation de l'Himalaya.

Dans l'hémisphère sud le parallèle de 35° passerait dans une zone de dépression océanique au sud de l'Afrique et de l'Australie, coupée seulement par la pointe de l'Amérique. Cette dépression elle-même serait expliquée précisément par l'action de dislocation, qui aurait produit un effondrement, un fossé, comme le fossé méditerranéen, dans notre hémisphère.

Cette action de dislocation et d'effondrement expliquerait également cette localisation des bandes géosynclinales sur le parallèle de 35°. La dépression du sol aurait été remplie par les sédiments, puis la même dislocation et force horizontale aurait, au tertiaire, favorisé les plissements et les relèvements montagneux. Nous verrons au numéro suivant que le déplacement du pôle a peut-être fait coïncider antérieurement le parallèle de 35° avec le fossé de la Baltique et le soulèvement hercynien.

Cette force horizontale de dislocation aurait donc ainsi créé d'abord des régions d'instabilité, caractérisées par les dépressions et les plissements des géosynclinaux de l'écorce terrestre, quelques-unes de ces régions d'instabilité étant dues peut-être à d'autres causes. Cette cause d'ébranlement continuerait à agir dans les mêmes régions, ou les régions voisines, comme cause *déterminante* des séismes.

Perrey, professeur à la Faculté des sciences de Dijon, avait attribué les tremblements de terre aux *marées internes*, et par une longue statistique, il avait établi les trois lois classiques dites de Perrey, qui rattachent la fréquence aux positions critiques du Soleil et de la Lune, qui donnent lieu aux marées d'amplitude maximum. Plus récemment de Parville et Flammarion sont arrivés à des résultats analogues. Les séismologues japonais admettent d'abord comme primordial l'existence préalable d'une région

d'équilibre instable, où ensuite les actions lunisolaires agiraient comme causes de déclenchements.

Nous retrouvons tout cela dans la force horizontale créée par la précession de l'écorce, puisque ses phases et ses maximums sont les mêmes que ceux des marées, et qu'elle a pu créer ces zones d'instabilité, en leur conservant encore le même caractère.

Cette même force horizontale explique parfaitement les plissements et les charriages, ainsi que les dépressions et soulèvements, par compression ou dilatation successives, ce sont les mêmes régions d'ailleurs qui ont été le siège des fossés les plus profonds ou des massifs montagneux les plus élevés, le fossé méditerranéen, les Alpes et les Pyrénées, le Caucase, le massif de l'Himalaya.

Les géologues avaient expliqué ces phénomènes par le refroidissement et la contraction. Or le refroidissement a plutôt produit l'effet contraire de celui qu'on a voulu expliquer. Si la Terre s'était refroidie uniformément le calcul montre que l'écorce n'aurait été ni contractée ni dilatée. Pour qu'elle se soit plissée et contractée sous l'action du refroidissement, il aurait fallu que le noyau se refroidisse plus que l'écorce. C'est le contraire qui a eu lieu. Le calcul montre que le refroidissement n'a pas pu pénétrer sensiblement à plus de 100^{km} de profondeur, n° 167. L'écorce refroidie et rétrécie a donc dû se fendiller, d'où les failles et les ruptures, et l'établissement automatique, mais jamais complet, de l'équilibre hydrostatique ou de l'isostasie. Il faut ajouter aux causes orogéniques le dégagement des gaz du noyau, n° 168, dont la poussée a soulevé les montagnes et les maintient encore soulevées, gaz qui s'échappent encore progressivement par les volcans.

L'étude de la concentration des matériaux qui ont formé les astres montre que l'énergie et la chaleur dégagées au début et au centre ont été très faibles pour croître progressivement avec la masse, jusqu'à un maximum. Comme la transmission de la chaleur a été très faible, par l'absence de courants de convection vers le centre, et n'a pas dû dépasser 100^{km}, comme pour l'écorce, la température y est restée sensiblement ce qu'elle était au début. Le noyau formant la bathysphère pourrait donc avoir les propriétés des solides, comme le veulent les géophysiciens, car on retrouverait les basses températures de la surface, vers 1000 ou 1500^{km} du centre.

187. Déplacement du pôle et des continents par la précession. Phénomènes géologiques. — On a vu plus haut que la précession générale était proportionnelle à J, rapport de la différence des moments d'inertie par rapport à l'un d'eux. Pour une couche élémentaire, comme l'écorce terrestre, cette valeur de J se confond avec l'aplatissement e, comme le montre directement la formule (18).

Le déplacement de l'axe de rotation de l'écorce terrestre, dû à la précession, est proportionnel à $e = 1:297$. Il n'est donc pas le même que le déplacement de l'axe de rotation de l'ensemble de la Terre, proportionnel à $J = 1:305$. Le premier surpasse le second de 3 centièmes, rapport 1,03.

Si le frottement de l'écorce sur le noyau était négligeable, l'axe de rotation de cette écorce avancerait de $1'',5$ par an, sur celui du noyau, ou de 46^{m} par an. Cela représente une vitesse linéaire excessivement faible, comme la résistance au frottement dans les liquides visqueux est proportionnelle à la vitesse, et tend vers zéro avec cette vitesse, il peut subsister un léger décalage. Ainsi le brai et la poix se déforment et coulent avec une vitesse de cet ordre et la viscosité des roches fondues n'est pas supérieure à celle de ces matières. En tout cas, pour tout corps qui n'est pas complètement rigide, il y a toujours une certaine vitesse de glissement. Au début des périodes géologiques, avec un refroidissement moins avancé, le frottement a pu être moins actif et ce phénomène du décalage de l'écorce par la précession a parfaitement pu produire le déplacement des pôles, que réclament les géologues pour expliquer certaines observations de glaciers anciens, dans les régions qui sont actuellement voisines de l'équateur.

Quelle que soit la vitesse de déplacement de l'écorce par rapport au noyau, l'écartement réel des deux axes ne peut pas être considérable, car la vitesse de rotation diurne introduit très vite un frottement beaucoup plus grand que le premier. Les deux axes restent donc sensiblement confondus, c'est le point de l'écorce correspondant à cet axe, qui se déplace par rapport à cet axe. C'est le pôle terrestre qui se déplace en sens inverse à la surface de la Terre.

Le déplacement maximum serait de 1° en 2400 ans. Une vitesse de déplacement 100 fois moindre donnerait 5° en deux millions

d'années. Ce serait suffisant pour expliquer les phénomènes géologiques. D'ailleurs ceux-ci pourraient s'expliquer aussi par des conditions locales. Sous l'équateur, le Kilimandjaro élève à 6000^m d'immenses glaciers récemment photographiés en avions. Leurs moraines et leurs pierres striées pourront se retrouver plus tard enfouies dans des terrains situés beaucoup plus bas, qui n'auront jamais été recouverts de glaciers.

Cette cause d'une différence de vitesse entre le noyau et l'écorce pourrait-elle amener une dislocation et une *dérive des continents*, comme l'a imaginé Wegener? C'est peu probable. Elle expliquerait seulement le déplacement des continents par rapport aux pôles, ce qui serait suffisant pour la plupart des phénomènes géologiques.

La séparation et la dérive des continents exigerait une cause dont l'action varierait d'une façon assez considérable et continue sur deux points assez voisins. La cause des tremblements de terre en est une, mais elle est alternative. Au bout de 24 heures l'effet total de déplacement est nul.

On a calculé la différence de l'attraction horizontale sur la partie émergée et la partie immergée d'un continent. C'est infiniment petit. La prédominance des vents d'Ouest aurait une action beaucoup plus grande pour entraîner les continents européen et africain vers l'Est. Il en serait de même pour l'Amérique. La différence dépendrait de la hauteur des montagnes.

D'ailleurs la théorie suppose à la base que les continents *peuvent* se déplacer par rapport à la mer, ou les uns par rapport aux autres, comme s'ils flottaient *librement* sur le noyau. Mais sous les mers ils sont et ont toujours été reliés et soudés entre eux par une épaisseur de l'écorce, à peine plus faible et aussi rigide que les matériaux qui les soutiennent. Tout cela fait bloc. On ne pourrait admettre un déplacement relatif, que si cette écorce n'était pas strictement rigide en dehors des continents. Or à la température de l'écorce, toutes les roches possèdent bien la rigidité des solides et ne supporteraient pas un plissement lent, même de l'ordre de lenteur de l'affaissement du brai ou de la poix.

CHAPITRE XVI.

JUPITER ET SATURNE. APLATISSEMENT ET CONSTITUTION INTERNE.

188. **Objet du Chapitre.** — Nous étudierons ici les résultats de l'application des calculs précédents aux conditons d'équilibre et à la constitution interne des grosses planètes Jupiter et Saturne. Nous verrons quelles sont les limites introduites, par la force centrifuge et par le rapport des moments d'inertie, pour l'aplatissement et pour la loi des densités.

Nous en conclurons qu'il faut admettre, pour Jupiter, une inflexion bien marquée de la densité, délimitant nettement un noyau central condensé et une zone superficielle plus légère. De plus cette zone superficielle plus légère doit également tourner plus vite que le noyau central, comme nous voyons déjà les parties de la surface tourner plus vite à l'équateur qu'aux pôles.

Ces caractères se retrouveront encore plus accentués pour Saturne, sur laquelle la force centrifuge est encore plus près d'égaler l'attraction. Nous en déduirons les conditions de formation de l'anneau.

Le Soleil présente les mêmes variations de vitesse de l'équateur aux pôles. Nous en déduirons les lois de formation des tourbillons et des taches. Nous en déduirons que ces trois astres, qui présentent la même répartition des vitesses extérieures, doivent présenter la même loi de répartition interne des densités, avec une inflexion marquée et une séparation nette du noyau et de la zone superficielle. Nous retrouvons ces caractères dans l'étude de la constitution interne d'un astre gazeux. *Voir* Alex. Véronnet, *Figures d'équilibre et cosmogonie* (*Mémorial des Sciences mathématiques* de M. Henri Villat).

189. **Jupiter. Les données d'observation.** — *L'Annuaire du*

Bureau des Longitudes donne actuellement pour la valeur des principaux éléments rapportés aux mêmes éléments terrestres : valeur du rayon équatorial, $a = 11,14$; masse $M = 318,36$ (Tisserand donnait seulement 309,8), pesanteur à l'équateur $\gamma = 2,53$. La densité par rapport à l'eau est 1,36, la durée de rotation à l'équateur de $9^h 50^m$, l'aplatissement est pris égal 1 : 15. Il est assez mal déterminé. Il y a 30 ans le nombre adopté pour l'inverse était 17.

Les nombres donnés par les astronomes, pour le rayon équatorial, oscillent entre 71.000km et 71.400km. La limite de précision des instruments, égale à $0'',1$, correspond à la distance de Jupiter à 300km. Le nombre $a = 11,14$, en rayons terrestres, donné par *l'Annuaire* correspond à 71.055km. Le nombre $a = 71.373^{km}$ donné par Sampson, regardé comme un des plus sûrs, correspond à 11,19.

190. Densité, pesanteur à la surface, rapport de la force centrifuge à la pesanteur. — Comme l'aplatissement e est assez considérable, il faut en tenir compte, même en première approximation. En désignant par c le rayon polaire, on aura pour la masse M et pour la densité moyenne D

$$(1) \qquad M = \frac{4}{3}\pi D a^2 c = \frac{4}{3}\, a^3(1-e), \qquad D = D_1 \frac{M}{a^3(1-e)},$$

$D_1 = 5,52$ est la densité de la Terre, M et a sont exprimés par rapport aux mêmes éléments de la Terre. On obtient $D = 1,362$, nombre de l'*Annuaire*. Si l'on négligeait l'aplatissement

$$1 - e = \frac{14}{15},$$

on aurait seulement $D = 1,27$.

Cette densité est très voisine de celle du Soleil 1,41, ce qui fait penser que Jupiter serait gazeux comme le Soleil. En tout cas la surface visible est fluide, puisque les parties ne tournent pas avec la même vitesse. On verrait d'ailleurs que la température de formation a dû atteindre 3.000 degrés et se conserver à peu près du même ordre à l'intérieur.

La pesanteur à l'équateur est donnée, en première approximation par la formule $(9)'$, n° 158, et par (33), n° 162, en seconde approxi-

mation. En désignant par γ la première de ces valeurs, on aura

$$(2) \qquad \gamma = f\frac{M}{a^2}\left(1 + e - \frac{3}{2}\varphi\right), \qquad \varphi = \varphi_1\frac{\omega^2 a}{\gamma}.$$

Le coefficient de la parenthèse, donne l'attraction à l'équateur, comme si la masse était condensée au centre sans rotation. Il donne $\gamma_1 = 2,56g$. C'est sensiblement la valeur donnée par l'*Annuaire*. Elle donne $1 : \varphi = 11,29$ en première approximation.

En remplaçant dans la première formule (2) φ par sa valeur donnée par la seconde, où φ_1 est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur pour la Terre, et chassant le dénominateur γ, on aura la formule

$$(3) \qquad \gamma^2 - (1 + e)\gamma_1\gamma - \frac{3}{2}\gamma_1\varphi_1\omega^2 a = 0,$$

ω est la vitesse de rotation à l'équateur, par rapport à celle de la Terre (36) n° **164**, c'est-à-dire le rapport $1440 : 590$ du nombre de minutes, qui mesure les deux rotations, et $\varphi_1 = 1 : 288,36$ pour la Terre.

Le troisième terme, indépendant de γ, est alors égal à $0,885\, g^2$ pour $a = 11,14$. On en tire $\gamma = 2,36g$, valeur exacte, assez différente de celle de l'*Annuaire*.

On en déduit alors la valeur $\varphi = 0,0974$, dont l'inverse est $10,26$. Il suffirait que la vitesse de rotation soit 3,20 fois plus grande pour que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction, sur l'équateur.

Avec $a = 11,19$, valeur de Sampson, on aurait $\gamma = 2,34$ et $1 : \varphi = 10,14$ valeurs assez peu différentes.

De même la correction de seconde approximation (33), n° **162**, donnerait également les valeurs plus précises, mais très voisines, utilisées dans la suite

$$\gamma = 2,37g, \qquad \varphi = 0,0965, \qquad 1 : \varphi = 10,36.$$

191. Vérification des limites de Clairaut entre l'aplatissement et le rapport de la force centrifuge et de l'attraction. Condensation centrale prononcée. — Les deux limites de l'aplatissement données par Clairaut, dans le cas de faibles vitesses de rotation, complétées pour des vitesses quelconques (n° **80**), s'écrivent et donnent pour

Jupiter,

$$(4) \qquad \frac{4}{5}\frac{1}{\varphi} < \frac{1}{e} < \frac{2}{\varphi} + 1, \qquad 8,3 < \frac{1}{e} < 21,7.$$

La valeur 15 observée pour l'inverse de l'aplatissement, est plus près de la limite 21,7 (cas de la condensation totale) que de la limite 8,3 (cas de l'homogénéité).

Pour la Terre, c'est le contraire. L'inverse de l'aplatissement 297 est plus voisin de 230 (homogénéité) que de 577 (concentration totale). Le rapport des nombres observés avec les deux limites, donne pour Jupiter et la Terre

$$(5) \qquad \frac{15}{8,3} = 1,8, \qquad \frac{21,7}{15} = 1,45, \qquad \frac{297}{230} = 1,3, \qquad \frac{577}{297} = 1,94.$$

On voit que ces rapports sont inversés pour ces deux astres. La Terre est beaucoup plus voisine de l'homogénéité 1,3, que de la concentration totale 1,94, alors que Jupiter est au contraire plus voisin de la condensation totale 1,45, que de l'homogénéité 1,8.

La variable η de Radau, appelée *le paramètre de condensation* par Callandreau, conduit aux mêmes conclusions On a les relations

$$(6) \qquad \eta = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2 - \frac{\varphi}{14}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right), \quad 0 < \eta < \zeta < 3, \quad \zeta = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right).$$

Avec la valeur φ de deuxième approximation et $1 : e = 15$ on obtient $\eta_1 = 1{,}620$ en première approximation et 1,436 en seconde pour Jupiter. Pour la Terre on avait obtenu 0,575. La valeur limite de η, d'après (3), dans le cas d'une condensation totale, serait égale à 3. Dans le cas de Jupiter, η dépasse la moitié de cette valeur, et seulement le sixième dans le cas de la Terre.

Avec les données $a = 11{,}19$ et $\gamma = 2{,}34$ on a $\eta_1 = 1{,}70$ et $\eta = 1{,}51$. L'écart est assez faible. Tisserand avec ses données obtenait 1,59. M. Wavre trouve $\eta = 0{,}86$ pour $1 : e = 15$, nombre environ deux fois trop faible (n° 83). *Figures planétaires.*

192. L'équation de condition de Poincaré appliquée à Jupiter. Limites étroites du rapport des moments d'inertie. — Nous ne pouvons pas ici déterminer le rapport des moments d'inertie et J par la précession, comme pour la Terre. Mais Laplace avait indiqué

déjà que la perturbation produite par le renflement équatorial de Jupiter, sur le mouvement des satellites les plus rapprochés, pourrait permettre de déterminer la différence des moments d'inertie, et d'en déduire son aplatissement avec plus de précision même que par les observations directes.

En effet, la différence des moments d'inertie rentre dans le coefficient du second terme du développement du potentiel. D'après le théorème de Stokes généralisé, nº **117**, (55), ce coefficient est un invariant, qui ne dépend que de e et de φ à la surface. Cette démonstration avait déjà été faite et la valeur donnée, (nº **159**), (19)″, en première approximation, et en seconde approximation par Callandreau, Darwin, Hamy. On a

$$(7)\qquad J' = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{Ma^2} = e - \frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{2}\left(3e^2 + \frac{3}{2}\,\varphi^2 - \frac{17}{7}\,\varphi e - \frac{8}{7}\,\gamma e^2\right),$$

a est le rayon équatorial, γ le terme dû à la déformation ellipsoïdale.

Laplace avait déduit J′ des observations avec six chiffres exacts $J' = 0{,}0219013$ (*Méc. cél.*, t. VIII, nº **23**). (Nous n'en conservons actuellement que trois.) Du mouvement du quatrième satellite il déduit la masse (premier coefficient du développement du potentiel), puis $\varphi = 0{,}0988$ et $1 : e = 14{,}0$; d'où $\eta = 1{,}46$, valeurs un peu faibles.

Beaucoup plus tard Adams donne $J' = 0{,}0216623$ et G. H. Darwin en déduit $\varphi = 0{,}0816$ et $1 : e = 16{,}02$, en négligeant le terme de correction en e^2.

En prenant la valeur généralement reçue actuellement, celle de Sampson adoptée par Andoyer, $J' = 0{,}02227$ et la valeur de φ calculée ci-dessus, on en déduit $1 : e = 14{,}2$ en première approximation et 16,3 en seconde approximation, la valeur du terme de correction étant 0,0091. La valeur probable observée, 15, tombe entre les deux. C'est la seconde valeur 16,3, que l'on devrait observer si J′ était exact. La précision donnée pour e par ce calcul est la même que celle de J′ d'après (7).

M. Wavre avec les mêmes données et les formules déduites de sa nouvelle méthode (nº **84**) obtient 1 : 17 en première approximation et 1 : 15,5 en seconde. Il est regrettable que cette méthode ne lui ait pas permis d'obtenir la formule classique si simple (7)

qui donne e presque sans calcul au moyen de J' et φ, et qui doit donner pour e une valeur plus petite en seconde approximation, donc une valeur plus grande de $1 : e$.

Cette valeur de $J'(7)$ peut encore s'écrire, en première approximation, d'après le calcul des moments d'inertie et la transformation de Radau (n° **135**)

$$(8) \qquad J' = \frac{3}{2} J \frac{C}{Ma^2} = \frac{3}{5} \frac{J}{D} \int \rho \, da^5 = J - \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = e - \frac{1}{2} \varphi.$$

Après avoir calculé e comme ci-dessus, la formule (8) permet, d'après la valeur de J', de calculer J, qui sera compris entre deux limites indiquées (n^{os} **136**, **137**).

Pour la limite de Poincaré, on peut prendre $K = 1$. On en déduit $1 : J = 15,8$ ou $J = 0,0634$.

Pour la seconde limite $\eta = \eta_1$ (Véronnet) on a

$$(9) \qquad \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = \frac{1+\eta}{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2} = 1,68, \qquad \frac{1}{J} = 14,7.$$

Si l'on admet $1 : e = 15$, comme on a $J < e$ d'après la limite de Callandreau (n° **125**), cette seconde limite ne peut être atteinte et l'on aura

$$(10) \qquad 15 < \frac{1}{J} < 15,8, \qquad J = \frac{C-A}{C}.$$

En seconde approximation, dans (8), on introduirait les mêmes termes de correction que dans le calcul de l'équation de condition de Poincaré (n° **152**).

193. La formule de Clairaut ne permet pas d'expliquer l'aplatissement de Jupiter par la formule des densités de Roche, Lipschitz, etc. Nécessité d'un noyau condensé. — La formule de Clairaut, qui relie ω^2 et e, aboutit à la formule de Hennessy (n° **127**), déjà indiquée par Laplace, et qui montre que l'aplatissement e est proportionnel à φ et ne dépend en outre que de la loi des densités. Pour une même loi de variation de la densité interne, le rapport $\varphi : e$ serait le même.

Le rapport des valeurs de φ pour Jupiter et la Terre étant 27,8, il faudrait, dans ce cas, que le rapport de leurs aplatissements soit

le même, c'est-à-dire que l'on ait $1 : e = 417$ pour la Terre. Il faudrait donc que la loi de Lipschitz puisse donner cette valeur pour la Terre, pour pouvoir donner $1 : e = 15$ pour Jupiter.

Les calculs numériques du Chapitre XIV, (n° 172), montrent que la formule de Lipschitz donne un maximum de 350 pour le cas limite d'une densité nulle, et par conséquent ne permet pas d'atteindre la limite ci-dessus. Callandreau avait déjà montré le premier que cette loi, cependant très large avec deux paramètres, ne permettait pas d'expliquer l'aplatissement de Jupiter.

Au contraire, la première formule de Lévy (n° 176), qui comprend un paramètre de plus, permet d'atteindre $1 : e = 429$ pour $\alpha = 1$ et 398 pour $\alpha = 0,9$. On en déduit qu'elle donne l'aplatissement $1 : e = 15$ pour Jupiter avec $\alpha = 0,961$, ce qui donne une densité centrale égale à 5,23 et une densité superficielle de 0,0084, soit 6 fois et demi plus grande que l'air. Cette formule donnerait au maximum 15,4 pour Jupiter, avec $\alpha = 1$, c'est-à-dire une densité superficielle nulle.

Avec la seconde formule de Lévy, on obtient $1 : e = 460$ pour $\alpha = 0,9$ et 423 pour $\alpha = 0,8$, l'aplatissement sera $1 : 15$ pour

$$\alpha = 0,784, \qquad \rho_0 = 5,67, \qquad \rho_1 = 0,12.$$

La densité superficielle serait seulement 100 fois celle de l'air, le huitième de celle de l'eau. Cette formule donne un maximum $1 : e = 17,2$.

Ces deux formules donnent un *point d'inflexion* pour la courbe représentative des densités de la surface au centre. La densité présenterait en ce point une variation maximum, qui séparerait nettement une zone superficielle de faible densité, d'*un noyau central plus condensé*. Cette condensation est mathématiquement nécessaire pour expliquer la grandeur de l'aplatissement de Jupiter. Cette courbe des densités avec point d'inflexion et noyau central est précisément donnée par une *masse gazeuze, qui suit la loi des gaz réels*.

194. La formule de Clairaut-d'Alembert ne permet d'expliquer l'aplatissement de Jupiter avec aucune loi de densité. — La formule précédente de Clairaut déterminait l'aplatissement en fonction seulement de φ, c'est-à-dire de la rotation et de l'attraction. La formule

de Clairaut-d'Alembert (19), n° 124, fait intervenir en outre la valeur de J et des moments d'inertie. Elle introduira donc de nouvelles conditions restrictives.

La loi de Lipschitz, dont celle de Roche n'est qu'un cas particulier, donne, pour le calcul de cette formule (5) (n° 170)

$$\text{(11)}\qquad J' = e - \frac{1}{2}\varphi = \frac{3}{5}\frac{J}{D}\int_0^1 \rho\, da^5 = \frac{3}{5}J\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\zeta}{n+5}\right),$$
$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n).$$

Le minimum de la parenthèse en ζ est 1 pour $\zeta = 0$ et le maximum $\frac{3}{5}$ pour $\zeta = 3$, et $n = 0$. En comparant cette valeur de J' avec celle donnée par (8), on pourra écrire pour ces deux limites

$$\text{(12)}\qquad \frac{9}{25} < 1 - \frac{2}{5}\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} < \frac{3}{5}, \qquad 1 < \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} < \frac{8}{5}.$$

En introduisant ensuite les deux limites de K (9), on a

$$\text{(13)}\qquad 1 < \sqrt{1+\eta} < \frac{1+\eta}{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2} < \frac{8}{5}.$$

Or les valeurs des deux expressions en η sont, pour Jupiter 1,62 et 1,68 et toutes deux plus grandes que $\frac{8}{5}$. Elles ne peuvent convenir pour aucune valeur des paramètres de la loi de Lipschitz.

Avec la loi de Lévy (n° 176), (11), $n' = 2$ on obtient

$$\text{(14)}\qquad J' = \frac{3}{5}J\frac{F_1}{D_1}, \qquad D_1 = \rho_0\left(1 - \frac{6\alpha}{n+3} + \frac{5\alpha^2}{2n+5}\right),$$
$$F_1 = \rho_0\left(1 - \frac{10\alpha}{n+5} + \frac{5\alpha^2}{2n+5}\right).$$

En remplaçant D_1 et F_1 par ces valeurs dans cette équation de Clairaut-d'Alembert (14) on obtient une équation du second degré en α pour déterminer ce paramètre en fonction de n. Or pour la valeur limite $n = 0$, cette équation limite se réduit, comme on le voit, immédiatement, à

$$\text{(15)}\qquad \left(\frac{3}{5}J - J'\right)(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \qquad (\alpha = 1).$$

On obtient la racine limite $\alpha = 1$, car $\frac{3}{5}J > J'$. Pour $n > 0$, et les valeurs connues de J et J′, on a toujours des solutions $\alpha > 1$, qui ne peuvent convenir.

Pour la deuxième forme de la loi de Lévy, $n' > 3$, on aurait encore $\alpha = 1$ pour $n = 0$ et $\alpha > 1$ pour $n > 0$. Aucune des formes de la loi de Lévy ne peut donner de solution.

On peut enfin considérer comme une *loi de densité limite* celle qui donne la seconde limite de la condition de Poincaré, c'est-à-dire l'hypothèse où la fonction η de Radau, qui doit être décroissante de la surface au centre, resterait constante à l'intérieur de l'astre. Elle donnerait une loi exponentielle des aplatissements

$$(16) \qquad \eta = \frac{re'}{e} = \eta_1, \qquad \frac{de}{e} = \eta_1 \frac{dr}{r}, \qquad e = e_1 r^{\eta_1}.$$

La condition η constant, ou $\eta' = 0$, portée dans l'équation différentielle de Clairaut-Radau, donne la valeur de ζ en fonction de η, et qui est donc aussi constante. On en déduit de même une loi exponentielle des densités

$$(16)' \qquad \zeta = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right) = -\frac{rD'}{D}, \qquad D = D_1 r^{-\zeta_1}, \qquad \rho = \rho_1 r^{-\zeta_1}.$$

Ces expressions, portées dans les trois formules fondamentales (n° 124), donnent les trois valeurs de l'aplatissement correspondant. La loi de Clairaut-d'Alembert, la plus simple, donne alors, en remplaçant ζ par sa valeur en η

$$(17) \qquad e - \frac{1}{2}\varphi = J\,\frac{3-\zeta}{5-\zeta} = J - \frac{2}{5}J\,\frac{1+\eta_1}{1+\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1^2}.$$

C'est précisément l'expression (9), qui a donné $1 : J = 14,7$, valeur inacceptable, car elle est plus petite que $1 : e = 15$.

Ainsi donc, même cette loi limite et exponentielle, à condensation extrêmement rapide, ne peut pas faire l'accord entre les valeurs de e, φ et J. Aucune loi de densité ne le peut.

195. Nécessité d'admettre des vitesses de rotation plus grandes vers la surface qu'à l'intérieur de l'astre. — La formule de Clairaut ne pouvait expliquer l'aplatissement de Jupiter qu'en admettant un

noyau interne avec condensation prononcée (n° **193**). Cela ne suffit plus avec la formule de Clairaut-d'Alembert en φ et J. Cela tient à ce que la valeur de J, déterminée par la condition de Poincaré (n° **192**), a donné pour J une valeur beaucoup trop voisine de e. Il faut donc rejeter l'hypothèse de Clairaut, la seule sur laquelle est appuyée la condition de Poincaré, indépendante de toute loi de densités.

Cette hypothèse de Clairaut admet que la planète tourne tout d'une pièce et dans la transformation de Radau (n° **135**), on a introduit la valeur de $r\eta'$, tirée de l'équation de Clairaut-Radau, établie dans l'hypothèse d'une vitesse de rotation uniforme.

En reprenant ce calcul à la formule (9) (n° **121**), sans faire $d\omega^2 = 0$ et en dérivant deux fois, on obtiendra dans (12), n° **122**, un nouveau terme, qui, transporté dans l'équation de Clairaut-Radau (n° **132**). formera le second membre de la formule (4) du même chapitre

$$(18)\quad r\eta' + \eta(\eta+5) - 2\zeta(\eta+1) = \sigma, \qquad \sigma = \frac{\rho}{e}\,\frac{r(\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{\omega^2}.$$

Cette valeur de $r\eta'$, portée dans la transformation de Radau, n° **135**, donnera, pour l'équation de condition de Poincaré (8), n° **192**, une expression où K sera remplacé par $1 + \frac{1}{10}\sigma$ au lieu de 1.

En faisant $\sigma = 1$ dans cette expression, on obtient $1 : \mathrm{J} = 18,4$.

Prenons ensuite pour les vitesses de rotation internes une formule analogue à celle de Lipschitz et Roche pour les densités, on aura en faisant $r = 1$ dans σ, valeur à la surface,

$$(19)\quad \omega^2 = \omega_0^2(1+\gamma r^n) \qquad \sigma = \frac{\rho}{e}\,\frac{\gamma n(6n-5)}{1+\gamma}, \qquad \gamma = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}.$$

En faisant $\sigma = 1$ on obtient $\gamma = 0,0092$ pour $n = 4$ et $\gamma = 0,0013$ pour $n = 10$. La différence des vitesses de rotation de la surface au centre serait égale à $\frac{1}{2}\gamma$. Dans le dernier cas $n = 10$ la variation relative de la vitesse de rotation serait 10 fois plus rapide que la variation en profondeur. A une profondeur de 71^{km} ou 0,001 du rayon l'écart de vitesse serait diminué déjà de 0,01.

Cette valeur de J portée dans (11) donne la densité correspon-

dant à la formule de Clairaut-d'Alembert et à la loi de Lipschitz

(20) $$\zeta = 0{,}648(n+5) > 5 \times 0{,}648 = 3{,}24,$$

Cette valeur est encore trop grande car $\zeta < 3$. Aucune valeur de la loi de Lipschitz ne peut encore convenir. Il faudrait $1 : J > 19{,}4$ pour faire l'accord et $\sigma > 1$.

Avec la formule de Lévy, (14), n° **194**, on obtient $\alpha = 0{,}951$ pour $n = 2$, et $\alpha = 0{,}967$ pour $n = 1$, valeurs qui donnent la loi de densité, et la loi des vitesses de rotation (19), cadrant avec les valeurs de e, φ et J.

Il y a donc accord à condition d'admettre *à la fois* une condensation centrale assez prononcée et des vitesses de rotation plus grandes à la surface qu'à l'intérieur de l'astre. La différence de vitesses observée à la surface conduit déjà à admettre d'ailleurs, que ces vitesses croissent également en profondeur.

196. Saturne. L'aplatissement obervé ne concorde pas avec les autres données. — Les données relatives à cette planète, sont indiquées ainsi dans l'*Annuaire*

$$a = 9{,}4;\quad e = 1 : 10;\quad M = 95{,}22;\quad D = 0{,}7;\quad \gamma = 1{,}06;\quad \omega = 9^h 56^m,$$

Sampson donne pour la vitesse de rotation à l'équateur $10^h 14^m$.

Ces valeurs donnent $\gamma_1 = 1{,}078\,g$, n° **190**, valeur voisine de celle donnée par l'*Annuaire*. Les formules (2) et (3), n° **190**, donnent ensuite pour valeur de la pesanteur à l'équateur en première approximation $\gamma = 0{,}798\,g$, puis en seconde approximation $0{,}840\,g$. Ces valeurs sont trop différentes pour qu'on puisse procéder comme pour Jupiter. On a calculé alors les valeurs du premier membre de (3), n° **190**, avec le terme de correction, pour des valeurs régulièrement espacées de γ. On trouve alors la solution $\gamma = 0{,}862$ pour $e = 1 : 10$. Comme la valeur de e, donnée par les observations, est peu sûre, on a fait les calculs également pour $1 : e = 9$, ce qui donne $\gamma = 0{,}875\,g$ et, pour $1 : e = 11$, qui donne $\gamma = 0{,}850$.

On en déduit, pour ces trois valeurs de e, les valeurs correspondantes de φ, de $\frac{\varphi}{e}$, de η et de la limite $\frac{2}{\varphi} + 1$ (pour 3 valeurs différentes de ω définies plus loin) :

$1:e$..	$1:\varphi$.	$\varphi:e$.	η_1.	η.	$\frac{2}{\varphi}+1$.	—	—
9.....	4,60	1,96	2,89	2,57	10,20	10,80	9,70
10.....	4,53	2,21	3,52	3,25	10,06	10,66	9,54
11.....	4,47	2,46	4,15	3,93	9,94	10,52	9,44

Pour l'aplatissement $1:e=9$ on a $\varphi=4,60$. Il suffirait que Saturne tourne seulement 2,14 fois plus vite pour que la force centrifuge équilibre la pesanteur à l'équateur. L'aplatissement serait égal à 1/3, trois fois plus grand seulement qu'actuellement, d'après la figure limite de Roche. En première approximation on aurait $\eta=1,59$.

On voit que la valeur de η, paramètre de condensation, est, pour toutes les valeurs de e, beaucoup plus grande que pour la Terre et même pour Jupiter. Tisserand avec les valeurs qu'il avait adoptées trouve pour η la même valeur que pour Jupiter. Callandreau a montré que cette valeur dépassait probablement 3, qui est sa limite supérieure, mais seulement dans l'hypothèse de faibles vitesses de rotation, comme pour la Terre. M. Wavre, avec sa méthode assez compliquée, trouve pour les valeurs de η (qui se calculent si simplement à partir des données) des nombres compris entre 1,00 et 1,33 pour $1:e$ compris entre 9 et 10, n° 83. Ces nombres sont près de trois fois trop petits.

Pour les inverses de l'aplatissement, égaux à 10 et 11 (2e et 3e ligne) η est nettement supérieure à la limite 3, donnée par (6). Ceci ne suffirait pas pour exclure les aplatissements $1:10$ et $1:11$, car, pour les grandes vitesses et les grandes concentrations, la limite de Clairaut $1:e=2:\varphi$ doit être remplacée par $\frac{2}{\varphi}+1$, dans la valeur de η(6) en y faisant $\varphi=1$, ce qui donne la limite plus large $\eta=\frac{11}{2}$, n° 80.

Pour n'importe quelle approximation, n'importe quelles vitesses de rotation et n'importe quelle concentration, c'est cette limite de Clairaut élargie $\frac{2}{\varphi}+1$ qu'il faut considérer. Les nombres correspondants, pour la vitesse de rotation de $9^h 56^m$, sont indiqués dans la sixième colonne du tableau ci-dessus. Ils doivent être supérieurs à $1:e$, première colonne. On voit que l'aplatissement $1:9$ rentre dans les limites voulues, $1:11$ la dépasse. La valeur $1:10$ est très près de cette limite. Pour qu'elle convienne, il faut admettre que

la masse de Saturne est assez concentrée pour que la densité superficielle soit négligeable, et que le noyau central est assez éloigné de la surface pour qu'il puisse être considéré comme sphérique par rapport à cette surface. La seule valeur acceptable pour l'aplatissement serait 1 : 9, en admettant que φ soit donné avec assez de précision et $a = 9,4$.

Si on prend comme vitesse de rotation $10^h\,14^m$ (Sampson), φ est augmenté de 0,013 et on obtient les nombres de l'avant-dernière colonne. Les aplatissements 1 : 9 et 1 : 10 seraient tous deux acceptables, et 1 : 11 toujours à rejeter.

En modifiant la valeur de φ de la même quantité en sens inverse, dernière colonne, la valeur 1 : 9 est seule acceptable.

La présence de l'anneau, qui joue le rôle d'un renflement équatorial énorme, et le peu de précison de l'évaluation de sa masse, ne permet pas de déterminer la différence des moments d'inertie de la planète, comme pour Jupiter. On ne peut pas utiliser la condition de Poincaré, ni la formule de Clairaut-d'Alembert, qui renferment J.

La formule de Clairaut prise toute seule permet d'accentuer pour Saturne les conclusions faites pour Jupiter, n° 193. Les valeurs très considérables trouvées ci-dessus pour η montrent à quel point la concentration doit y être considérable, beaucoup plus accentuée même que pour Jupiter. De plus la valeur de φ pour Saturne est 64 fois plus grande que pour la Terre. On verrait, comme pour Jupiter, que la loi de Lipschitz et Roche ne peut expliquer son aplatissement. Il en serait de même pour la loi de Lévy, malgré l'inflexion des densités et la forte concentration qu'elle permet d'introduire.

Là encore, pour faire l'accord il faut introduire, outre une forte concentration, des vitesses de rotation plus grandes dans la zone superficielle que dans le noyau intérieur. Ces vitesses plus grandes s'expliqueraient par la chute plus tardive des éléments, qui ont formé les couches superficielles, et l'anneau lui-même. Ces vitesses n'auraient pas eu le temps de s'égaliser par frottement en milieu gazeux.

197. Conditions mécaniques de la formation de l'anneau de Saturne. — Maxwel a démontré que l'équilibre mécanique de cet

anneau ne pouvait pas subsister s'il était solide ou liquide. On admet qu'il est composé de particules solides séparées, assez petites, analogues aux éléments, qui constituent les comètes, bolides et étoiles filantes. Chacune d'elles se meut indépendamment, d'un mouvement képlérien, autour du centre de la planète.

Kant, puis Laplace, ont expliqué la formation de cet anneau, par l'augmentation de la force centrifuge, dans la contraction de la planète par le refroidissement, jusqu'à égaler l'attraction. L'étude mathématique et mécanique a été faite par Roche. On peut préciser les conditions de cette formation d'après les conclusions des chapitres précédents de cet ouvrage.

Si l'on a une masse homogène, en rotation uniforme, qui se contracte indéfiniment, elle s'aplatit également indéfiniment et prend finalement la forme d'un disque, où la force centrifuge arrive à égaler l'attraction partout en même temps.

Dans le cas d'une masse hétérogène, également en rotation uniforme, il arriverait un moment où la force centrifuge égalerait l'attraction à l'équateur, où un anneau commencerait à se former (figure de Roche, Chap. VII), mais le phénomène se continuerait jusqu'au centre, sans solution de continuité. On aboutirait encore à un disque plat, où la densité et la vitesse de rotation seraient variables, du bord extérieur au centre, au lieu d'être les mêmes partout.

Pour expliquer la séparation de l'anneau, il faut de toute nécessité donner aux éléments qui l'ont formé une vitesse plus grande que celle de l'ensemble, c'est la conclusion à laquelle nous sommes déjà arrivés pour les éléments superficiels de Jupiter et de Saturne. On peut expliquer cette vitesse plus grande par la chute tardive de la matière qui a formé ces planètes, le frottement n'ayant pas encore eu le temps d'égaliser ces vitesses.

La contraction par refroidissement permet aussi d'expliquer ces vitesses superficielles plus grandes. En effet le moment cinétique μ de chaque partie de la masse resterait invariable. Considérons alors une masse $m = 1$, située à la distance r, la vitesse de rotation étant ω, on aura

$$(21) \qquad \mu = \omega r^2 = \text{const.}, \qquad \delta\omega = -2\,\omega\,\frac{\delta r}{r}.$$

Si la contraction est uniforme δr est proportionnelle à r et la

variation $\delta\omega$ de la vitesse de rotation est la même partout. La vitesse de rotation reste uniforme.

Mais la contraction par refroidissement sera naturellement plus grande à la surface, δr et $\delta\omega$ y seront plus grands qu'à l'intérieur. Cependant la variation de ces vitesses à partir de la surface se serait faite d'une façon progressive et continue, et il n'y aurait pas eu séparation nette de l'anneau et de la planète.

Considérons en effet une masse superficielle quelconque, qui se trouve en équilibre pour une vitesse de rotation ω. M étant la masse totale et r_1 son rayon, on a

$$(22) \qquad \omega^2 r_1 = \frac{fM}{r_1^2}, \qquad \mu_1^2 = fMr_1.$$

Si l'on désigne par δr l'épaisseur de cette couche à l'équateur, par μ le moment cinétique des parties *inférieures* de cette couche, par r' la valeur du rayon vecteur où ces parties trouveront leur vitesse d'équilibre, on aura

$$(23) \qquad r' = \frac{\mu^2}{fM} = \frac{\omega^2(r_1 - \delta r)^4}{fM} = r_1 - 4\,\delta r.$$

Ainsi donc si une bande d'épaisseur δr, de vitesse ω s'est séparée à la surface de Saturne d'une façon quelconque, elle aura formé un anneau d'épaisseur $4\,\delta r$, 4 fois plus grande que son épaisseur propre. Si la vitesse allait en décroissant avec la profondeur, comme cela a été établi ci-dessus, la dispersion aurait encore été plus grande. Si la décroissance de vitesse avait été continue, il y aurait eu nécessairement formation continue de l'anneau, jusque sur l'équateur de la planète, les bandes empiétant les unes sur les autres.

Il faut donc admettre que la matière qui a formé l'anneau avait, au moment de la formation de celui-ci, une vitesse nettement supérieure à celle de l'atmosphère de la planète dans lequel elle était plongée, et qui a constitué une discontinuité bien marquée, jusqu'à la séparation complète des deux, par la condensation de cette atmosphère.

On est conduit à admettre qu'à l'origine de Saturne un des éléments constitutifs du système, lambeau matériel analogue à une grosse comète ou à un satellite rapproché, ait pénétré dans l'atmo-

sphère intérieure de la planète en formation. La résistance du milieu a brisé la masse en fragments, a rendu les orbites circulaires et dispersé ces orbites en anneaux.

La résistance de ce milieu n'a pas pu durer longtemps, autrement toute la masse, qui a formé l'anneau serait tombée à la surface de la planète, s'y serait incorporée, en perdant assez de vitesse pour ne plus pouvoir se libérer de l'attraction. On en conclura que la vitesse de formation des planètes a dû être très grande et leur condensation très rapide.

Les rayons extrêmes des anneaux sont égaux à 2,25 et 1,48 du rayon de la planète. L'épaisseur est donc égale à 0,77, dont le quart est 0,19. Il s'ensuit d'après le calcul ci-dessus que la matière qui l'a constitué avait primitivement une épaisseur inférieure au 1/5 du rayon de la planète.

Malgré la discontinuité de vitesses entre la matière de l'anneau et celle de l'atmosphère, il y a dû avoir entraînement de l'une par l'autre, avec des vitesses intermédiaires, qui ont dû remplir l'intervalle entre les anneaux et la planète d'une matière diffuse trop peu dense pour être visible. Ce doit être un lambeau de cette matière qui tombant sur la surface de la planète, y produisit la *tache blanche* d'août 1933. L'éclat indiquait une température supérieure à celle de la surface, l'extension de la tache en avant montrait que la vitesse de sa matière était supérieure à celle de la surface.

Ce sont des chutes de matières analogues, soit originelles, soit plus récentes, qui permettent d'expliquer pour Jupiter, Saturne et pour le Soleil, les vitesses plus grandes à la surface et à l'équateur. Il y a permanence très longue de ces vitesses. L'égalisation des vitesses sur des épaisseurs de plusieurs kilomètres, dans une masse gazeuse, demanderait des millions d'années d'après les calculs de lord Kelvin.

Remarque I. — Récemment J. H. Jeans annonçait au monde que la Lune allait se casser en deux, puis en 4, 8, 16 morceaux, etc, de manière à constituer autour de la Terre un anneau analogue à celui de Saturne, dont il expliquait d'ailleurs l'origine de la même façon. Jeffreys, un autre savant anglais, a précisé ensuite que ce phénomène n'aurait pas lieu avant 30 milliards d'années. Or c'est Roche, qui avait calculé le premier, il y a près de 100 ans,

la possibilité du fractionnement d'un astre en deux, en passant assez près d'un autre qui attire davantage la partie tournée vers lui que l'autre. Le phénomène a été constaté dans le fractionnement de la comète de Biéla. Le calcul s'applique parfaitement aux comètes, dont le noyau est probablement formé de morceaux solides, analogues aux bolides, plus ou moins gros, mais non soudés entre eux. Pour la Lune, il faudrait tenir compte de la cohésion des matériaux solides.

De plus, comme on l'a vu au n° **183**, le ralentissement de la rotation de la Terre par le freinage dû aux marées, fait que la Lune s'éloigne de la Terre, pour conserver la constance des moments de rotation. Elle ne trouvera donc pas dans l'avenir les conditions favorables pour se transformer en anneau. De plus J. H. Jeans lui-même, à la suite de Darwin, admettait que la Terre avait pu se fractionner en deux à l'origine, pour donner naissance à la Lune, qui se serait ensuite éloignée d'elle progressivement. Mais alors, c'est dès le début que la Lune se serait trouvée dans les conditions favorables à une désagrégation en anneau. De plus les anneaux de Laplace n'auraient jamais pu former de satellites ou de planètes. C'est le contraire qui aurait dû arriver et les anneaux seraient partout la règle. Enfin les satellites de Mars sont beaucoup plus près et peut-être dans la zone dangereuse.

Remarque II. — Le phénomène, analogue à celui indiqué plus haut, de la chute progressive d'une *planète* sur son étoile centrale permet d'expliquer de même tous les phénomènes présentés par les *étoiles nouvelles* : fréquence beaucoup plus grande que par le choc de deux étoiles, augmentation rapide de l'éclat, diminution plus lente, etc.

L'élévation brusque de la température superficielle de l'étoile à 10 000 ou 20 000 degrés suffit pour expliquer l'*apparence explosive* des étoiles nouvelles, tout en étant un phénomène purement superficiel. Les phénomènes radioactifs sont très lents et ne concernent que des atomes individuels. Il en serait de même des autres décompositions atomiques, qui sont en outre complètement hypothétiques. Enfin le calcul montre que si le Soleil tout entier était en mélinite solide faisant explosion, il se contracterait au lieu de se dilater, en atteignant une température de 3000 degrés

au plus au lieu de 6000. Même à la surface, il n'y aurait pas de projections gazeuses de l'ordre de ses protubérances ordinaires (Alex. VÉRONNET, *Constitution et évolution de l'Univers*, Chap. X, nos 9-12).

198. Le Soleil. Conditions mécaniques et physiques de la formation des taches. — Comme pour Jupiter et Saturne, les différents parallèles de la surface du Soleil ne tournent pas avec la la même vitesse. La loi de Carrington, modifiée par Faye, peut s'écrire

$$(24) \qquad \omega = \omega_0(1 - a \sin^2\lambda), \qquad \omega_p = \omega_e(1 - a),$$

ω_e et ω_p sont les vitesses de rotation à l'équateur et aux pôles, λ la latitude, a un coefficient qui définit les variations de ω.

La théorie de Faye, d'après laquelle les taches seraient dues à des mouvements tourbillonnaires en profondeur, n'est plus guère contestée, Si la vitesse de rotation était partout la même, il n'y aurait pas de tourbillon. Désignons donc par $\delta\omega$ l'excès de rotation par rapport à ω_p et par v la vitesse variable correspondante, on a

$$(25) \qquad \delta\omega = \omega - \omega_p = a\omega_e \cos^2\lambda, \qquad v = r\delta\omega = a\omega_e R \cos^3\lambda.$$

Si une cause quelconque, frottement, pression de la chromosphère, solidarise en un point les éléments superficiels, il se produira un tourbillon dont la vitesse de rotation w sera définie par la moitié du rotationnel de la vitesse variable v, ou de la dérivée prise horizontalement, suivant un méridien

$$(26) \qquad w = \frac{dv}{d(R\lambda)} = -3a\omega e \cos^2\lambda \sin\lambda.$$

La formation des tourbillons et des taches est nulle, $w = 0$, à l'équateur et aux pôles. Elle serait maximum à une latitude de 35°. C'est ce que montrent les observations, sauf que ce maximum est en réalité plus près de l'équateur, mais la latitude dépend aussi des causes qui provoquent la formation des tourbillons.

Ces causes résident probablement dans l'abaissement et la contraction périodique des couches de la chromosphère, jusqu'au niveau de la photosphère. Il doit y avoir comme une pulsation

analogue à celle des Céphéides, ayant la même période que les taches et qui serait la cause déterminante. Les observations de Halle font remonter en effet les phénomènes magnétiques des taches jusque dans la chromosphère.

D'autre part on sait que le rayonnement solaire s'accompagne d'une émission d'électrons, en particulier par les facules plus chaudes. Cette émission ne peut pas se continuer indéfiniment, car la charge électrique produite doit freiner, puis arrêter cette émission pour lui substituer une émission égale d'ions positifs. Il y aurait ainsi alternativement refoulement des électrons ou des ions positifs, vers l'extérieur ou vers la photosphère, avec refoulement consécutif des gaz de la chromosphère.

Cette pulsation électrique permet d'expliquer également les phénomènes magnétiques des taches. Dans une première période de 11 ans des taches, il y aura rayonnement maximum de chaleur et d'électrons, prédominance des ions positifs vers la photosphère, qui donnent au mouvement tourbillonnaire des taches une certaine polarité magnétique. Dans la période suivante de 11 ans, il y aura émission maximum d'ions positifs, prédominance des électrons vers la photosphère, la polarité magnétique des taches sera inversée, comme le montrent les observations. De plus cette polarité sera toujours inverse dans les deux hémisphères du Soleil, car le sens du mouvement tourbillonnaire y est renversé.

Enfin le tourbillon de la tache s'enfonce et s'amincit dans la masse, en rencontrant des couches dont la rotation est moins rapide. Il s'incurve donc vers l'arrière et il pourra reparaître à la surface en formant une nouvelle tache, compagnon de la première, dont la rotation et la polarisation magnétique sont inversées, comme on l'observe.

Si la tache est assez importante et assez large, son tourbillon descendant peu atteindre la surface du noyau central, déjà signalé dans Jupiter et Saturne, où il y aurait accroissement brusque de la densité formant obstacle à la pénétration et forçant la tache à s'étaler sur sa surface, en formant un entonnoir très net, comme nous le révèlent les observations.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages et Mémoires principaux.

A. CLAIRAUT, *Théorie de la figure de la Terre*, 1743.

P. LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, 1799.

G. P. AIRY, *Figure of the Earth*, Londres, 1835.

E. ROCHE, *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné*. Acad. de Montpellier, 1849, 1851. Annales de l'Obs. de Paris, t. 5.

M. HAMY, *Étude sur la figure des corps célestes*. Ann. de l'Obs. de Paris, t. 19, 1889.

CALLANDREAU, *Sur la figures des planètes*. Ann. de l'Obs. de Paris, t. 19, 1889.

TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. 2.

G. H. DARWIN, *Scientific papers*, t. 2. Montly Notices, t. 60 (1900) et *Scientific Papers*, t. 3, nº 7.

F. R. HELMERT, *Höherre Geodäsie*, *Leipzig*, t. 2, 1884.

H. POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, 1902.

H. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Hermann, 1912.

P. APPELL, *Les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*. Traité de mécanique rationnelle, t. 4, fasc. 1 (1920). *Acta mathematica* (1923).

LIAPOUNOFF, *Figures d'une masse hétérogène en rotation*, 1922.

LUC PICART, *Sur la rotation d'un corps variable*, Mémoires de l'Observatoire de Bordeaux, t. 7.

ALEX. VÉRONNET, *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre*, Thèse. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1912.

ALEX. VÉRONNET, *La forme de la Terre*, Hermann, 1914.

ALEX. VÉRONNET, *Les figures d'équilibre et la cosmogonie*, Collection Villat, 1926, Gauthier-Villars.

ALEX. VÉRONNET, *Constitution et évolution de l'Univers*, Doin, 1926.

J. H. JEANS, *Problems of Cosmogony*, 1922.

R. WAVRE, *Figures planétaires et géodésie*, Gautier-Villars, 1932.

DIVE, *Rotations internes des astres fluides*, Thèse, 1930.

Les autres travaux sont indiqués dans les chapitres relatifs à la question spéciale qui y est traitée.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Étude historique des travaux et des résultats.

PREMIÈRE PARTIE.

Le problème d'Appell.
Conditions générales de l'équilibre hydrodynamique.

CHAPITRE II.

Équation fondamentale d'hydrodynamique. Discussion générale.

Chapitre III.

Équilibre relatif.

Chapitre IV.

Mouvement permanent.

CHAPITRE V.

Mouvement permanent relatif.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude générale et évolution de la forme d'une masse hétérogène.

CHAPITRE VI.

Étude générale des formes ellipsoïdales.

Chapitre VII.

Évolution générale des figures d'équilibre.

Chapitre VIII.

Ellipsoïdes de révolution homofocaux et homothétiques. Limitation d'une masse hétérogène par deux ellipsoïdes homogènes.

TROISIÈME PARTIE.

La figure de la Terre.
Problème de Clairaut et problème de Poincaré.

CHAPITRE IX.

Le Problème de Clairaut. Les surfaces de niveau ellipsoïdales.

CHAPITRE X.

Relations entre la densité et les aplatissements.

Chapitre XI.

Le problème de Poincaré.

Chapitre XII.

Calculs en seconde approximation.

QUATRIÈME PARTIE.

Questions diverses. La pesanteur. La densité intérieure Mouvements superficiels. Jupiter et Saturne.

Chapitre XIII.

La variation de la pesanteur et l'aplatissement de la Terre.

Chapitre XIV.

Application de différentes lois de densités au problème.

Chapitre XV.

Hypothèses autres que celle de Clairaut.
Vitesses internes et déplacements à la surface.

Chapitre XVI.

Jupiter et Saturne. Forme extérieure et constitution interne.



LIBRAIRIE-IMPRIMERIE
GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. DANTON 05-11 et 05-12. R. C. Seine 99506.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
(Chèques postaux : Paris 29323.)
Frais de port en sus : France et France d'Outre-Mer, 5 %; Étranger, 10 %.

BEGHIN (H.)
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris

ET

JULIA (G.)
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Exercices de Mécanique

DEUX VOLUMES IN-8 (25-16)

TOME I, fascicule I de 336 pages ; 1930 ....

TOME I, fascicule II de 240 pages ; 1931 ....

APPELL. — *Mécanique rationnelle*, t. IV, fasc. 2.



LIBRAIRIE-IMPRIMERIE
GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. DANTON 05-11 et 05-12. R. C. Seine 99506.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
(Chèques postaux : Paris 29323.)
Frais de port en sus : France et France d'Outre-Mer, 5 %; Étranger, 10 %.

BLANC (E.)
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Agrégé de l'Université

Problèmes et Compléments de Mécanique

A L'USAGE DES CANDIDATS
AU CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
ET DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Préface de M. Édouard LE ROY
Membre de l'Institut

Volume in-8 raisin (25-16) de XIII-287 pages et 113 figures ; 1931 . . . . **60** fr.



LIBRAIRIE-IMPRIMERIE
GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. DANTON 05-11 et 05-12. R. C. Seine 99506.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
(Chèques postaux : Paris 29323.)
Frais de port en sus : France et France d'Outre-Mer, 5 %; Étranger, 10 %.

CHAZY (Jean)
Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris

Cours de Mécanique rationnelle

(Cours de la Faculté des Sciences)

▼

DEUX VOLUMES IN-8 (25-16)

TOME I : *Dynamique du Point matériel.* 392 pages, avec 182 figures ; 1933... **70 fr.**

TOME II : *Dynamique des Systèmes matériels.* VI-462 pages, avec 182 fig. ; 1933.. **80 fr.**



LIBRAIRIE-IMPRIMERIE
GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. DANTON 05-11 et 05-12. R. C. Seine 99506.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
(Chèques postaux : Paris 29323.)
Frais de port en sus : France et France d'Outre-Mer, 5 %; Étranger 10 %.

ROY (Louis)
Correspondant de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Cours de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée de l'Université de Toulouse

Cours de Mécanique appliquée

A L'USAGE DES ÉLÈVES
DE L'INSTITUT ÉLECTROTECHNIQUE
ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
ET DES CANDIDATS AU CERTIFICAT
DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome I : *Cours de Mécanique rationnelle.* In-8 (25-16) de VI-260 pages, avec 103 figures; 1921 .... 40 fr.

Tome II : *Statique graphique et résistance des matériaux.* In-8 (25-16) de 213 pages, avec 86 figures; 1921 .... 40 fr.

103640-36 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.